# TIDSKRIFT
FÖR
# ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1934

# TIDSKRIFT

FÖR

# ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

SJUTTONDE ÅRGÅNGEN

1934

STOCKHOLM

REDAKTION OCH EXPEDITION: KARLBERGSVÄGEN 16IV

LUND
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI
1934

# Sjuttonde årgångens innehåll.


Sid.

ALFVÉN, H. Investigations on the Ultra-short Electromagnetic Waves (ref. av gradualavh.) ..... 112

ARRHENIUS, S. Anm. av W. Heisenberg, E. Schrödinger, P. A. M. Dirac, Die moderne Atomtheorie; P. Debye, Struktur der Materie; K. Rast, Atomtheorie und Atombau..... 104

AURÉN, T. E. Anm. av B. Asplind, Våra grannar i världsrymden 246

BECKMAN, N. Några iakttagelser om pytagoreiska trianglar ..... 200

BERGGREN, B. Pytagoreiska trianglar..... 129

BJÖRKESON, A. Anm. av Moll-Rudberg, Lärobok i fysik: Magnetism och elektricitet ..... 250

BLOM, C. E. Om Heiselers $\pi$-värde ..... 42

— — Anm. av »Praktische Schulphysik» och E. Roller und H. Pricks, Schulversuche zur Elektrizitätslehre ..... 52

BODLUND, C. Ett talproblem ..... 1

— — och A. WAHLGREN, En diofantisk ekvation av tredje graden 65

BÅGMAN, S. Cosinussatsen i sfäriska trigonometrien..... 45

BÄCKSTRÖM, H. Om toning av fotografiska silverbilder ..... 95

CARLSON, V. Anm. av Hedström-Öije, Arbetsuppgifter i ekvationslära för realskolan, del I ..... 255

COMÉT, S. Ett försök till elementär behandling av entropibegreppet 143

EDLÉN, B. Wellenlängen und Termsysteme zu den Atomspektren der Elemente Lithium, Beryllium, Bor, Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff (ref. av gradualavh.) ..... 184

ENSKOG, D. Anm. av K. Darrow, Elementare Einführung in die Quantenmechanik ..... 181

ERDTMAN, H. Studies on the Formation of Complex Oxidation and Condensation Products of Phenols (ref. av gradualavh.) ..... 110

FRIBERG, S. Objektiv demonstration av natriumlinjens omvändning 37

FYLKING, K.-E. Nobelpriset i kemi 1934 ..... 193

GERTZ, Ett nytt solur ..... 31

HENNICHS, S. Anm. av I. Bolin och B. Gustaver, Kemi för gymnasiet ..... 107

— — Anm. av Böös-Lundberg, Lärobok i kemi för gymnasiet 253

JENVALL, A. Anm. av Geelmuyden-Strömgren, Lærebog i astronomi ..... 105

JENVALL, A. Astronomisk åskådningsmateriel ..... 168, 230
JÖNSSON, E. Bestämning av vattnets ångbildningsvärme ..... 36
KRONSJÖ, E. Anm. av G. Setterberg, Hur skall jag bli styv i matematik? ..... 106
KUYLENSTIERNA, N. Om figurer med rationella bestämningsdelar... 205
LEIDE, A. Den positiva elektronen ..... 153
LIEN, M. Anm. av H. Hellgren, Grafostatik ..... 47
— — Anm. av L. Elfman, Lärobok i mekanik för tekniska skolor 255
LINDE, E. Anm. av G. Angel, Die Alkalichloridelektrolyse in Diaphragmazellen ..... 180
LUNDBERG, J. Anm. av M. E. Weeks, The Discovery of the Elements 241
LUNDBLAD, R. Om termisk utvidgning ..... 233
LUNDQUIST, O. Neutronen ..... 77
LÖNNQVIST, C. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning ..... 46
MALMBORG, I. Newtons färgringar i en roterande vätskelamell..... 39
— — Lufts termiska tryckkoefficient ..... 172
MÄCS, C. Anm. av S. Nydell, Elektroteknik för sjökaptensklasser 182
NILSSON, E. Apparat för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten ..... 174
— — En metod för approximativ bestämning av luftens medeltemperatur genom temperaturavläsning en gång per dygn... 225
NORLING, G. Några försök med termoelement ..... 173
NYDELL, S. Sfäriska trigonometriens grundformler. Ett tillägg ... 103
NYSTRÖM, B. E. Anm. av Rendahl-Wahlström-Frank, Räknebok för realskolan, andra och tredje delen ..... 50
— — Berg-Hagström, Räknelära ..... 183
PETRINI, H. Om geometrisk sannolikhet ..... 40
— — Parallellaxiomet för en yta av oändlig utsträckning..... 140
PETTERSSON, J. P. Anm. av Nyström-Olson, Likformighetslära för gymnasiet ..... 182
Red. En gåva ..... 115
— — Åttonde skandinaviska matematikerkongressen ..... 116
ROLF, B. Återigen $\pi$ ..... 43
SANDSTRÖM, B. En enkel experimentell belysning av Avogadros lag 177
SJÖSTEDT, C. E. En approximativ konstruktion av regelbundna månghörningar..... 176
— — Om normalformen för den räta linjens ekvation ..... 218
SJÖSTRÖM, M. Anm. av Kosmos, bd 11 ..... 48
STARCK, G. En metod för syrgasframställning ..... 222
— — Anm. av O. Hassel, Kristallchemie ..... 106
— — Anm. av H. Reinboldt, Chemische Unterrichtsversuche ... 179
— — Anm. av R. F. Hunter, The Electronic Theory of Chemistry 244

Stenström, V. Anm. av A. Einstein, Min världsbild ..... 248
Svensson, B. Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Lokalavdelning i Lund ..... 113
Söderqvist, J. Vakuumfunkenspektren der Elemente Natrium, Magnesium, Aluminium, und Silicium (ref. av gradualavh.) 185
Tandberg, J. Vad är ett kilogram? En studie i metersystemet 13
— — Anm. av »Alte Probleme—neue Lösungen in den exakten Wissenschaften» ..... 245
Uhler, A. Anm. av R. Tambs Lyche, Begynnelsegrunnene av differensial- och integralregningen ..... 246
Wahlgren, A. Om heltalstrianglar ..... 5
— — och C. Bodlund, En diofantisk ekvation av tredje graden ... 65
Wetterblad, T. Självinduktion ..... 239

---

Föredrag under våren 1934 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar ..... 117, 128
Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken 1933—34 187
Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna v. t. och h. t. 1934 ..... 122, 260
Provräkning i realskolexamen v. t. och h. t. 1934 ..... 127, 264
Problemavdelning: Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 55, 118, 189, 256
Fysikaliska uppgifter, förf. av O. Bergentz, E. Hernqvist, T. Wetterblad, K. A. Wingårdh, C. E. B. ..... 59
Gradualavhandlingar (autoreferat): Hannes Alfvén (112), Bengt Edlén (184), Holger Erdtman (110), Jonas Söderqvist (185) .....
Översikt av innehållet i följande tidskrifter: Populär astronomisk tidskrift, Svensk kemisk tidskrift, Era, Industritidningen Norden, Matematisk Tidsskrift (København), Fysisk Tidsskrift (København), Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo), Den Höiere Skole (Oslo) ..... 54, 64, 187
Bokanmälningar: Hellgren, Grafostatik; Kosmos, Bd. 11; Rendahl-Wahlström-Frank, Räknebok för realskolan; Praktische Schulphysik; Roller Pricks, Schulversuche zur Elektrizitätslehre; Roller, Physikalische Versuche etc. ..... 47
Heisenberg-Schrödinger-Dirac. Die moderne Atomtheorie; Debye, Struktur der Materie; Rast, Atomtheorie und Atombau; Geelmuyden-Strömgren, Lærebog i astronomi; Setterberg, Hur skall jag bli styv i matematik; Hassel, Kristallchemie; Bolin-Gustaver, Kemi för gymnasiet; Dædalus, Tekniska Museets årsbok 1934 ..... 104

RHEINBOLDT. Chemische Unterrichtsversuche; ANGEL, Die Alkalichloridelektrolyse in Diaphragmazellen; DARROW, Elementare Einführung in die Quantenmechanik; NYSTRÖM-OLSON, Likformighetslära för gymnasiet; NYDELL, Elektroteknik för sjökaptensklasser jämte handledning i radiopejling; BERG-HAGSTRÖM, Räknelära ..... 179

WEEKS. The Discovery of the Elements; HUNTER, The Electronic Theory of Chemistry; Alte Probleme—neue Lösungen in den exakten Wissenschaften; TAMBS LYCHE, Begynnelsegrunnene av differensial- og integralregningen; ASPLIND, Våra grannar i världsrymden; EINSTEIN, Min världsbild; MOLL-RUDBERG, Magnetism och elektricitet; BÖÖS-LUNDBERG, Kemi för gymnasiet; ELFMAN, Mekanik för tekniska skolor; HEDSTRÖM-ÖIJE, Arbetsuppgifter i ekvationslära för realskolan ..... 241

Insänd litteratur från följande utgivare:

A. Bonnier, C. E. Fritze, Folkskollärarnas Tidning, Industritidningen Norden, Ingenjörsvetenskapsakademien, P. A. Norstedt & Söner, Svenska Bokförlaget, Svensk läraretidning, Svenska Astronomiska Sällskapet, Svenska Elektricitetsverksföreningen, Svenska Föreningen för ljuskultur, Svenska Fysikersamfundet, Pedagogisk Tidskrift, Tidens förlag, alla i Stockholm; Skola och Samhälle, Göteborg; Almqvist och Wiksell, Uppsala; Pedagogiska föreningen i Finland, Helsingfors; Norsk Matematisk Forening, Gyldendal Norsk Forlag, H. Aschehoug & C:o, Olaf Norli, Oslo; Matematisk Forening, Selskabet for Naturlærens Udbredelse, København; Physikalische Werkstätten, Göttingen; Franz Deuticke, J. A. Barth, S. A. Hirzel, Leipzig.

* *
*

Tidskr. utkommer med fyra 64-sidiga häften årligen (mars, juni, sept., dec.). Pris per häfte 2: 25, per årgång kr. 8: —. Subskription genom inbetalning av kr. 8: — på postgirokonto n:r 52755.

*Redaktion och expedition:* **Adjunkt C. E. BLOM, Karlbergsvägen 16 IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.**

# Ett talproblem.

Av CARL BODLUND.

Pells ekvation $x^2 - Ay^2 = 1$ kan alltid lösas, oavsett vilket helt, positivt, icke kvadratiskt tal $A$ är. Däremot är ekvationen

$$x^2 - ay^2 = -1 \qquad (1)$$

ej alltid lösbar utan endast för vissa värden på koefficienten $a$. Skrives den $x^2 + 1 = ay^2$, ser man omedelbart, att $a$ måste vara en divisor i $x^2 + 1$. Men detta villkor räcker ej. Talet 34 t. ex. är divisor i $x^2 + 1$ för bl. a. $x = 13$, men ekvationen $x^2 - 34y^2 = -1$ kan ändock ej lösas (med heltalsvärden på $x$ och $y$). Vilka betingelser i övrigt måste ställas på koefficienten $a$, om ekvationen $x^2 - ay^2 = -1$ skall vara lösbar?

Ett svar på denna fråga är, att det kedjebråk, som fås av $\sqrt{a}$, har en primitiv period av ett udda antal delnämnare. Men detta svar ger ingen möjlighet att på förhand uppgiva ett antal $a$-värden, som duga. Man måste undersöka egenskapen i ovannämnt avseende hos kedjebråket för varje enskilt tals kvadratrot. Har man däremot en algebraisk form för $a$, så har man därmed också denna möjlighet.

Den uppställda frågan vill jag besvara med följande sats:

*Ekvationen* $x^2 - ay^2 = -1$ är lösbar, om

$$a = (pn + \mu)^2 + 2qn + \nu^2. \qquad (I)$$

*Av de i denna form för a ingående kvantiteterna är n ett godtyckligt tal (positivt, negativt eller noll); p är ett udda tal, som jämte q är bestämt av kongruensen*

$$q^2 + 1 \equiv 0 \,(mod.\ p); \tag{2}$$

$$\nu = \frac{q^2+1}{p}; \quad \mu = \frac{q\,(q^2+1)}{2p}\left(= \frac{1}{2}\nu q\right).$$

I en uppsats om Pells ekvation i denna tidskrift (årg. *16*, 1933, sid. 10) satte jag koefficienten

$$a = \alpha^2 + \beta = \frac{ap^2}{p\,(\alpha p + q)} \cdot \frac{(\alpha p + q)^2}{p\,(\alpha p + q)}$$

samt därefter

$$ap^2 - (\alpha p + q)^2 = \varepsilon \,(\varepsilon = \pm 1, \pm 2, \pm 4).$$

Sättes här $\varepsilon = 1$, får man

$$(\alpha p + q)^2 - ap^2 = -1, \tag{3}$$

eller just den ekvationstyp, som det är fråga om. Vi sätta i (3) $a = \alpha^2 + \beta$ och lösa ekvationen med avseende på $\beta$. Vi få då

$$\beta = \frac{1}{p^2}(2pq\alpha + q^2 + 1). \tag{4}$$

Om $\beta$ skall vara helt tal, måste här tydligen $q^2 + 1$ vara delbart med $p$. Sätter man därför $\frac{q^2+1}{p} = \nu$, får man

$$\beta = \frac{1}{p}(2q\,\alpha + \nu). \tag{5}$$

Av (5) framgår, att $p$ måste vara ett udda tal, ty $q^2 + 1$ kan ej innehålla mer än en faktor 2. Är $p$ ett jämnt tal, blir följaktligen $\nu$ ett udda tal och $\beta$ ej ett helt tal.

Ekvationen $p\beta = 2q\alpha + \nu$ har den allmänna lösningen

$$\alpha = pn + \frac{1}{2}\nu q; \quad \beta = 2qn + \nu^2.$$

Sättes $\frac{1}{2}\nu q = \mu$, blir följaktligen

$$a = (pn + \mu)^2 + 2qn + \nu^2. \qquad \text{(I)}$$

Om koefficienten $a$ är ett tal av denna form, är således ekvationen $x^2 - ay^2 = -1$ lösbar och har bl. a. rotparet $x = \alpha p + q = p(pn + \mu) + q$; $y = p$.

* *
*

Vid tillämpningen av I kan man utgå från ett givet, godtyckligt valt värde på $q$. För talet $p$, vilket är en udda divisor i $q^2 + 1$, liksom för $\mu$ och $\nu$, får man då i regel flera värden att välja på. T. ex. $q = 13$ ger $p = 1$, 5, 17 och 85; $q = 18$ ger $p = 1$, 5, 13, 25, 65 och 325. Utgår man däremot från ett givet värde på $p$, får detta naturligtvis icke väljas godtyckligt. För att kongruensen (2) skall kunna lösas, måste enligt talteorien det udda talet $p$ vara en summa av två kvadrattal, som sinsemellan äro relativa primtal, vilket innebär detsamma som att de i $p$ ingående primfaktorerna måste vara av formen $4k + 1$. Exempel: $p = 137$ (primtal) $= 4^2 + 11^2$. För att finna $q$-värden till detta $p$ löser man någondera av de diofantiska ekvationerna $4x - 11y = \pm 1$, varefter man får $q = 4y + 11x$. De minsta värdena äro $x = 3$, $y = 1$, vilka giva $q = 37$. För $p = 221 = 13 \cdot 17 = 5^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2$ få vi på samma sätt $q = 47$ och $q = 21$. Likaså få vi för $p = 1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$ fyra av varandra oberoende $q$-värden, nämligen resp. 268, 242, 463 och 47.

* *
*

Formen I kräver i vissa fall avsevärt stora talvärden på de ingående storheterna för att giva relativt små värden på $a$. Man får t. ex. $a = 61$ av

$$a = (3805n + 49457)^2 + 1444n + 137^2$$

för $n = -13$. Likaledes får man $a = 109$ av

$$a = (851525n + 30947\,824610)^2 + 749864n + 165085^2$$

för $n = -36344$.

Dessa och en hel mängd liknande koefficientvärden kan man emellertid få med avsevärt mindre talstorheter ur formen

$$a = (p[2n + 1] + 2\mu)^2 + 4q[2n + 1] + 4\nu^2. \qquad \text{(II)}$$

Denna form härledes utan svårigheter ur ekvationen $(\alpha p + q)^2 - ap^2 = -\varepsilon$ för $\varepsilon = 4$. Den ger, när $p = 5$ och $q = 2$, $a = (10n + 7)^2 + 16n + 12$, d. v. s. $a = 61$ för $n = 0$; när $p = 25$ och $q = 7$, $a = (50n + 39)^2 + 56n + 44$, d. v. s. $a = 109$ för $n = -1$. Om $a$ är bildat enligt form II, får ekvationen $x^2 - ay^2 = -1$ rotparet

$$x = \frac{1}{2} w (w^2 + 3); \quad y = \frac{1}{2} p (w^2 + 1),$$

där $w = p(p[2n + 1] + 2\mu) + 2q$. För $p = 1$ ger formen II $a = (2n + 1)^2 + 4$.

Ett par exempel:

Form I: $a = (425\,n + 4553)^2 + 314n + 58^2$.
För $n = -10$ blir $a = 303^2 + 224 = 92033$.
Ekvation: $x^2 - 92033y^2 = -1$;

$$x_1 = 303 \cdot 425 + 157 = 128932; \; y_1 = 425.$$

Form II: $a = (425[2n + 1] + 9106)^2 + 628(2n + 1) + 116^2$.
För $2n + 1 = -21$ blir $a = 181^2 + 268 = 33029$.
Ekvation: $x^2 - 33029y^2 = -1$;

$$w = 425 \cdot 181 + 314 = 77239.$$

$x_1 = 230\,398650\,917318$; $y_1 = 1\,267745\,913425$.

# Om heltalstrianglar.

Av AGNE WAHLGREN.

I föregående häfte av denna tidskrift har professor NAT. BECKMAN behandlat problemet att sammanställa två rätvinkliga heltalstrianglar, så att en triangel erhålles, vars sidors mätetal äro delbara med 5. Detta har föranlett mig att taga upp det allmänna problemet att på samma sätt erhålla en heltalstriangel, vars sidor äro delbara med ett godtyckligt tal $N$ och vars yta anges av ett helt tal.

Jag förutskickar några satser ur läran om kongruenser. Två hela tal $a$ och $b$ sägas vara kongruenta med avseende på modylen $m$, om deras differens är delbar med $m$, så att man får

$$a = km + b,$$

där $k$ är ett positivt eller negativt helt tal. Detta tecknas

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Speciellt betyder således $a \equiv 0$, att $a$ är delbart[1] med $m$. Lätt inses, att om för samma modyl $a \equiv b$ och $c \equiv d$, blir $ac \equiv bd$. Omvänt blir den första kongruensen en följd av de båda sista, under förutsättning att $a$, $b$, $c$ och $d$ äro relativa primtal till $m$. I talteorien visas, att om $p = 2m + 1$ är ett primtal, satisfieras kongruensen

$$x^{2m} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (1)$$

av alla hela tal, som ej äro delbara med $p$. Det finnes alltid ett tal $g$, sådant att digniteterna $g^s$ för $s = 1, 2 \ldots 2m$ bliva kongruenta med var sitt av de $2m$ första hela

[1] Om modylen förut angivits, behöver den ej upprepas vid varje kongruens.

talen (i annan ordning!) och först $g^{2m}$ blir $\equiv 1$. Ett sådant tal kallas en primitiv rot till kongruensen (1). Då blir $g^{s_1} \equiv g^s$, endast om

$$s_1 = s + k \,.\, 2m.$$

[De digniteter $g^s$, där $s$ är relativt primtal till $2m$, bli även primitiva rötter till (1).] Vidare får man

$$g^m \equiv p - 1 \equiv -1.$$

Vi skola lösa kongruensen

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}. \tag{2}$$

Lätt inses, att om $x_1$ är en lösning, blir varje tal, som är kongruent med $x_1$, en lösning. Det är därför tillräckligt att söka lösningarna till (2) bland de hela tal, som äro mindre än $p$. Men vart och ett av dessa är kongruent med en av digniteterna $g^s$. Vi sätta därför $x \equiv g^z$.

$$\because g^{2z} \equiv -1 \equiv g^m,$$
$$\because 2z - m + k \,.\, 2m.$$

Denna likhet är möjlig, endast om $m$ är ett jämnt tal $2n$, d. v. s. om $p$ har formen $4n + 1$. Man får då

$$z = n + k \,.\, 2n,$$
$$x \equiv g^{n + k \,.\, 2n}.$$

För $k = 2h$ får man

$$x \equiv g^{n + h \,.\, 4n} \equiv g^n;$$

för $k = 2h + 1$ får man

$$x \equiv g^{3n} \equiv g^{2n} \,.\, g^n \equiv -g^n.$$

Vardera av dessa kongruenser har en lösning, som är $< p$. Betecknas den ena av dessa med $j$, blir den andra $p - j$. I stället för den senare kan även $-j$ väljas till primär lösning. Lösningarna till (2) utgöras då av alla tal, som äro kongruenta med $\pm j$.[1]

[1] Vilja vi lösa kongruensen

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{a}$$

Ex. För $p = 13$ är 2 en primitiv rot till kongruensen (1). Primära rötter till (2) äro $8 \equiv 2^3$ och $5 \equiv 2^9 \equiv -8$.

Om modylen är ett sammansatt tal $N$, är kongruensen

$$j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N} \qquad (2a)$$

lösbar, om $N$ endast innehåller primfaktorer av formen $4n + 1$ samt eventuellt *en* faktor 2. Antalet primära lösningar blir $2^s$, om antalet olika udda primfaktorer är $s$. Jag skall endast antyda lösningen genom följande tre satser:

1. Om $j$ är rot till kongruensen

$$j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^r},$$
$$\therefore j^2 + 1 = a \cdot p^r,$$

kan man alltid, eftersom $j$ och $p$ äro relativa primtal, finna heltalslösningar till ekvationen

$$2jx + a = py.$$

Då blir $J = j + xp^r$ en rot till kongruensen

$$J^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^{r+1}}.$$

2. Om $m_1$ och $m_2$ äro relativa primtal och

$$j_1^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m_1},$$
$$j_2^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m_2},$$

---

kunna vi utbyta den mot

$$x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \equiv 0 \qquad (b)$$

Jämte lösningarna till (a) har denna kongruens lösningar $x \equiv 1$, som ej tillhöra (a) annat än för $p = 3$. Om vi nu liksom ovan sätta $x = g^z$, få vi:

$$g^{3z} - 1 \equiv 0,$$
$$3z = k \cdot 2m.$$

Om vi bortse från lösningen $k = 3n$, $x \equiv 1$, vilken som nämnt i regel ej tillhör (a), är denna likhet möjlig endast om $m$ är delbart med 3, d. v. s. om $p$ har formen $6n + 1$. Man får då lösningarna $x \equiv g^{2n}$ och $x \equiv g^{4n}$. Kongruensen (a) är således möjlig endast för $p = 3$ och för $p = 6n + 1$.

kan man alltid finna heltalslösningar till

$$J = m_1 x + j_1 = m_2 y + j_2.$$

Då är $J$ en rot till

$$J^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m_1 m_2}.$$

Om man av $j_1$ och $j_2$ erhåller roten $J$, ge $m_1 - j_1$ och $m_2 - j_2$ roten $m_1 m_2 - J$.

3. Om $m$ är ett udda tal och

$$j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m},$$

är $j$ eller $j + m$ (allteftersom $j$ är ett udda eller jämnt tal) en rot till

$$J^2 + 1 \equiv 0 \pmod{2m}.$$

---

Efter dessa förberedande satser övergår jag till trianglarna och skall närmast söka en triangel, vars sidor äro delbara med ett godtyckligt *primtal* $p$. Sidorna i en rätvinklig primtalstriangel (d. v. s. en triangel, vars sidor äro *relativa* primtal) anges genom formlerna

$$x = 2ab, \qquad y = a^2 - b^2, \qquad z = a^2 + b^2,$$

där $a$ och $b$ äro relativa primtal till varandra och således även till $z$. Dock får man en gemensam faktor 2, om $a$ och $b$ äro udda. Att $z$ skall vara delbart med $p$, kan skrivas:

$$a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3}$$

Nu kan man alltid bestämma ett tal $x$, så att $a \equiv bx$ (det gäller endast att finna heltalslösningar till ekvationen $bx + py = a$, där $b$ och $p$ äro relativa primtal). Kongruensen (3) kan då skrivas:

$$b^2 (x^2 + 1) \equiv 0,$$

eller eftersom $b$ ej är delbart med $p$:

$$x^2 + 1 \equiv 0. \tag{4}$$

Såsom vi sett, finnas lösningar till denna kongruens, endast om $p = 4n + 1$. Endast primtal av denna form kunna således ingå såsom faktorer i hypotenusan till en rätvinklig primtalstriangel. De båda primära lösningarna till (4) beteckna vi som förut med $\pm j$. Sedan $b$ valts godtyckligt, bestämmes då $a$ ur endera av kongruenserna

$$a \equiv \pm bj. \tag{5}$$

Vi skola nu söka bilda en triangel, vars alla sidor äro delbara med $p$, genom att sammanställa två rätvinkliga heltalstrianglar, så att de få en katet gemensam. Vi behandla genast det allmänna fallet, då de rätvinkliga trianglarnas sidor ej äro relativa primtal utan den enas sidor innehålla $m$, den andras $n$ som gemensam faktor. Höjden (den gemensamma kateten) i den bildade triangeln är då

$$h = 2mab = 2ncd. \tag{6}$$

De omfattande sidorna äro

$$u = m(a^2 + b^2), \qquad v = n(c^2 + d^2),$$

och den tredje sidan

$$w = m(a^2 - b^2) \pm n(c^2 - d^2). \tag{7}$$

Villkoren för att $u$ och $v$ skola vara delbara med $p$ äro enligt (5):

$$a \equiv \pm bj, \qquad c \equiv \pm dj. \tag{8}$$

Den senare kongruensen kan även skrivas:

$$cj \equiv \pm dj^2 \equiv \mp d \qquad \because d \equiv \mp cj.$$

Härav synes, att $d$ erhålles av $c$ på samma sätt som $c$ av $d$, endast att tecknet blir olika. Av de båda faktorerna $c$ och $d$ välja vi då till $c$ den, för vilken man får samma tecken i båda kongruenserna (8), oberoende av vilkendera faktorn som är störst. Detta inverkar ju ej på (7), där vi ha dubbelt tecken. Låter man $j$ betyda vilken som helst av de båda

primära rötterna $j$ och $p - j$ till kongruensen (4), förlorar man ingen lösning genom att stryka det dubbla tecknet i (8) och skriva:

$$a \equiv bj, \qquad c \equiv dj. \tag{8a}$$

Av (6) erhålles då:

$$mbj \,.\, b \equiv ndj \,.\, d,$$

$$\therefore mb^2 \equiv nd^2 \tag{9}$$

och

$$ma^2 \equiv mb^2j^2 \equiv nd^2j^2 \equiv nc^2. \tag{9a}$$

Tecknet i (7) bestämma vi nu genom att skriva:

$$w \equiv m(a^2 - b^2) - n(c^2 - d^2). \tag{10}$$

Allteftersom $c$ är större eller mindre än $d$, skola således de båda trianglarna placeras på samma eller olika sidor om den gemensamma kateten. Av (9) och (9a) följer nu, att $w \equiv 0$.

Divideras nu triangelns alla sidor med $p$, blir höjden ett bråk med nämnaren $p$. Då måste, såsom prof. Beckman påpekat, basen fortfarande innehålla faktorn $p$; ty enligt Herons formel kan en heltalstriangels yta aldrig bli ett rationellt bråk. Detta kan även visas direkt. Vi skriva om (10) med användning av (6):

$$w \equiv ma^2 - mb^2 - \frac{mab}{d} \,.\, c + \frac{mab}{c} \,.\, d$$

$$\equiv \frac{m}{cd}(a^2cd - b^2cd - abc^2 + abd^2)$$

$$\equiv \frac{m}{cd}(ac + bd)\ (ad - bc).$$

Men enligt (8a) är

$$ac \equiv bdj^2 \equiv -bd,$$

varav följer, att den första parentesen är delbar med $p$. Men även den andra parentesen är delbar med $p$, emedan

$$ad \equiv bjd \equiv bc.$$

Alltså är $w$ delbart med $p^2$.

Vårt resultat blir sålunda, att vi kunna godtyckligt välja $b$ och $d$ samt endera av de primära rötterna till (2). Sedan bestämmas $a$ och $c$, så att de satisfiera kongruenserna (8a). Slutligen sökes minsta gemensamma dividenden $D$ till $ab$ och $cd$, och $m$ och $n$ bestämmas av likheten.

$$D = mab = ncd.$$

Vill man få $m = n = 1$, kan man sätta

$$a = qr, \qquad b = st, \tag{11}$$

där $q$ och $s$ äro de med $c$ gemensamma faktorerna och $r$ och $t$ tillhöra $d$.

$$\because c = qs, \qquad d = rt. \tag{12}$$

Kongruensen (9) blir här

$$\begin{aligned} &b^2 \equiv d^2, \\ &\because d = \varepsilon b, \qquad (\varepsilon = \pm 1) \\ &rt \equiv \varepsilon st, \\ &r \equiv \varepsilon s. \end{aligned} \tag{13}$$

Av det senare villkoret i (8a) erhålles slutligen:

$$\begin{aligned} &qs \equiv rtj \equiv \varepsilon stj, \\ &\because q \equiv \varepsilon tj. \end{aligned} \tag{14}$$

Man kan således välja $s$ och $t$ godtyckligt och sedan bestämma $q$ och $r$, så att de satisfiera kongruenserna (13) och (14), varefter $a$, $b$, $c$ och $d$ erhållas med användning av (11) och (12).

Ex. 1. $p = 13$. Vi ha funnit $j = 5$ eller 8. Väljes $j = 5$, $s = 6$, $t = 2$, $\varepsilon = -1$, $r = 7 \equiv -6$ och $q = 3 \equiv -2.5$, erhålles $a = 21$, $b = 12$, $c = 18$, $d = 14$, och efter division med 13 bli sidorna 45, 40 och 13.

Ex. 2. $p = 13$. Väljes $j = 8$, $s = 1$, $t = 2$, $\varepsilon = 1$, $r = 14 \equiv 1$ och $q = 3 \equiv 2.8$, erhålles efter division med 13 sidorna 136, 61 och 195.

---

Vill man bestämma en triangel, vars sidor äro delbara med ett sammansatt tal $N$, framgår av det föregående, att $N$ endast får innehålla udda primfaktorer av formen $4n + 1$ jämte eventuellt *en* faktor 2. Kongruensen

$$j^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N} \tag{2a}$$

har då flere par primära lösningar. För att sidorna $u$ och $v$ skola bli delbara med $N$, måste $a$, $b$, $c$ och $d$ väljas så, att

$$a \equiv bj_1, \qquad c \equiv dj_2, \tag{15}$$

där $j_1$ och $j_2$ äro rötter till (2a), varefter man får:

$$w = m(a^2 - b^2) \pm n(c^2 - d^2).$$

Med användning av (15) och (6) erhålles:

$$nc^2 \equiv ncdj_2 \equiv mabj_2 \equiv -ma^2j_1j_2;$$
$$nd^2 \equiv -mb^2j_1j_2;$$
$$\therefore w \equiv m(a^2 - b^2)(1 \mp j_1j_2).$$

Eftersom $a$ och $b$ äro relativa primtal och $a^2 + b^2$ är delbart med $N$, kan $a^2 - b^2$ ej innehålla någon av faktorerna i $N$. Skall $w$ vara delbart med $N$, måste man således ha:

$$1 \mp j_1j_2 \equiv 0 \pmod{N},$$
$$\therefore j_2 \mp j_1j_2^2 \equiv 0,$$
$$\therefore j_2 \pm j_1 \equiv 0,$$
$$\therefore j_2 \equiv \mp j_1.$$

Alltså måste $j$-värdena i (15) tillhöra samma rotpar till (2a), och på samma sätt som man kom över från (8) till (8a) finner man, att man ej förlorar någon lösning, om *samma* $j$-värde väljes i båda kongruenserna (15); sidan $w$ erhålles då enligt formeln (10).

---

# Vad är 1 kilogram?

## En studie i metersystemet.

Av J. TANDBERG.

> »Återkomme aldrig den tid, då igenom kunskapernas skymning eller nedgång om vår vetenskapshorizont ... så enfaldiga problemer, som detta ämnet innefattar, skola befinnas ouplösliga!»
>
> (C. Berch, Academisk Afhandling om Svenska Vigterne, Upsala 1782.)

Frågans besvarande ledsagas vanligen av ett vänligt leende, ty varje tekniker och ingenjör vet mycket väl, att 1 kg är enheten för en kraft och lika med den kraft, varmed jorden attraherar ett viktstycke, som f. ö. närmare definieras i läroböcker och uppslagsböcker (»normalkilogrammet», »arkivkilogrammet», »rikslikaren» o. dyl.), och varje naturvetenskapligt orienterad person vet lika väl, att kilogram är enhet för massa, och mången annan bildad person vet ju ävenså väl, att 1 kg är en viktsenhet. — När ingenjören skall räknemässigt framställa en massa, dividerar han »vikten» med jordaccelerationen och uppgiver att 1 kg har massan $\frac{1}{9{,}81} = 0{,}102$. När den naturvetenskapligt orienterade vill siffermässigt framställa den kraft, varmed massan 1 kg påverkar underlaget, uppgiver han den vara 1000 $g$ dyn, ($g$ = accelerationen vid fritt fall, mätt i cm . sek$^{-2}$) alltså i Stockholm 981 843 dyn. Och båda ha rätt. Men de förstå varandra icke riktigt, förrän båda medgiva och inse, att de tala om olika saker, när de nämna ordet kilogram. Avsikten med denna uppsats är emellertid ej att utreda den elementära skillnaden mellan den tekniska uppfattningen av kilogram

såsom kraftenhet och den vetenskapliga såsom massenhet. Vi skola snarare betrakta några av de säregna konsekvenser, som de olika uppfattningarna medfört i lagstiftning, läroböcker och uppslagsböcker, huruledes stor förvirring utan nödtvång har uppstått och hur metersystemet har tolkats olika under olika tider och i skilda läger. Metersystemet är nämligen ej fullt så kristallklart, som man gärna tror det vara enligt vissa populära framställningar. Slutligen skola vi sammanföra några intressanta men mindre kända historiska notiser, som beröra ämnet.

## Svensk lagstiftning.

Vi slå upp Sveriges Rikes Lag och läsa uppmärksamt igenom Kungl. Förordn. om mått och vikt av d. 9 okt. 1885. Där stipuleras klart och tydligt:

*§ 1. Metern är enhet för längdmåttet. Kilogrammet är enhet för vikten.*

*§ 2. Meterns längd och kilogrammets tyngd bestämmas genom prototyper, en för metern och en för kilogrammet, vilka, jämte reservprototyper, en av vartdera slaget, anskaffas av den, på grund av konventionen d. 20 maj 1875 ... i Paris inrättade internationella byrå[n] för mått och vikt.*

(Vi notera i förbigående, att några reservprototyper aldrig anskaffats och att lagen använder egenskapen *tyngd* såsom bestämning för kilogrammet.)

*§ 3. 1. Utom de i näst föregående § omförmälda prototyper och reservprototyper skola till jämförelse och efterrättelse finnas huvudlikare så väl för längdmåttet som för vikten, ävensom kontroll- och arbetslikare.*

*2. Huvudlikare för längdmåttet skall vid en temperatur av 15 grader Celsius över fryspunkten utvisa det mått för metern, som angives av vederbörlig prototyp vid temperaturen för smältande is.*

*3. Huvudlikare för vikten skall i lufttomt rum angiva kilogrammets rätta vikt och vid temperaturen för smältande is hava en specifik vikt av 8,9.*

(Vi notera, att Sveriges huvudlikare av förgylld mässing, som tillverkats av instrumentmakaren P. M. Sörensen i Stockholm, i verkligheten har sp. v. 8.2264 vid 0° och att den vid 1:a komparationen med riksprototypen (1894) befanns vara icke mindre än 6.69 mg för tung. Å. G. Ekstrand och K. Ångström, som utförde vägningarna, relatera: »orsaken [till den stora avvikelsen] är den, att Herr Sörensen afsigtligt gjort dem [huvudlikaren o. reservlikaren] för tunga för att sedan vid själfva komparationen få utföra en sista justering. Detta, som anmäldes vid vigternas aflemnande till Byrån, kom dock till förf:s vetskap först efter komparationens slut, då vidare ändringar ej läto sig utföras».)

*§ 4. Indelningen av mått och vikt skall vara följande:*

*a) för längdmått:*

*en meter utgörande 10 decimeter;*

— — — — - - -

*en myriameter eller ny mil utgörande 10 kilometer eller 10,000 meter;*

*c) för rymdmått:*

— — — — — —

*en kubikdecimeter eller liter utgörande 1,000 kubikcentimeter;*

— — — — — —

*d) för vikt:*

*en ton utgörande 10 deciton eller 1,000 kilogram;*

*en deciton utgörande 100 kilogram;*

(Vi observera, att *myriametern* är ett lagligt svenskt längdmått och att »*mil*» icke utan vidare kan användas, det heter »*ny mil*»; att kubikdecimeter helt jämställes med liter; och slutligen att det skall heta *en* ton och *en* deciton, oaktat Sv. Akad. Ordlista upptager den praktiskt gängse formen *tonnet* i best. form.)

*§ 24. 3. Vikter må förfärdigas av järn, brons, mässing, platina, nysilver eller annan för ändamålet tjänlig metall, men vikter på mindre än 1 hektogram ävensom precisionsvikter må ej vara av järn.*

Vidare läsa vi om nödvändigheten av att vid handel använda vederbörligen justerade redskap. Med justering förstås undersökning, godkännande och stämpling av redskapen.

Vi nöja oss med denna axplockning och giva oss ut på spaning i lagboken efter begreppet *massa*. Det uppträder första gången i K. F. d. 19 dec. 1924 ang. bestämning av längd, rymd och *massa*. Denna K. F. uttalar bl. a., att en var skall äga att vid Kungl. mynt- och justeringsverket »få utförd bestämning av föremåls längd, rymd och *massa*, i den mån sådan bestämning kan inom verket utföras»; vidare meddelas uppgifter om kostnaden härför. Det är av intresse att notera, att K. Mjt. 7 dagar tidigare, d. 12 dec. 1924 utfärdade en K. F. ang. tilläggsarvoden under år 1925 för justering av mått och *vikt*.

Härav framgår, att man vid mynt- och justeringsverket kan få bestämt massan hos ett föremål, vilket som helst som rimligtvis kan undersökas, alltså även av en vikt,[1] men att detta icke är detsamma som att få vikten justerad.

Nu vilja vi göra ett tankeexperiment. Vi antaga, att det finnes en guldsmed, som är så rättrådig, att han för sin handel med guld och platina anskaffar en precisionsvikt på 10 kg av samma platina-legering, som använts vid tillverkningen av såväl den internationella som den svenska kilogramprototypen, och att dess massa är exakt 10 kg. Så länge han använder denna precisionsvikt för vetenskapligt bruk, är allt gott och väl.

Men antag, att han vill uppväga guld eller platina med den *i handelssyfte,* då råkar han illa ut. Vikten måste justeras, annars är den olaglig. Han insänder den till justering såsom precisionsvikt. Den jämföres genom vägning i luft med en likare av mässing, som t. ex. har sp. v. 8,2264 vid 0°. Dess volym 1,217 $dm^3$ vid 20°. Platinavikten har sp. v. 21,55 och volymen 0,464 $dm^3$. Differensen är 0,753 $dm^3$, och då

[1] I äldre lagtext användes substantivet *lödja* i st. f. vikt (= viktstycke). Tyvärr har ordet kommit ur bruk.

luften kan antagas väga 1,20 g/dm³ vid tillfället, blir platinavikten 0,904 gram för tung och *kan ej godkännas*. Enl. samma K. F. § 33 får nämligen skillnaden i detta fall icke överstiga ± 5 dg. Han kan alltså icke få sin fina precisionsvikt justerad med mindre han låter fila av c:a $^1/_2$ eller 1 gram eller mera. Gör han icke det, utan väger upp och säljer platina med den ojusterade platinavikten, är han förvunnen till straff enl. strafflagen 22 Kap. 5 §. Och dock är ju vikten fullkomligt korrekt så snart man avser dess *massa,* och vid uppvägning av platina med densamma blir ju luftens upptryck eliminerat, varför vägningen blir riktig, oberoende av luften!

## Läroböcker och uppslagsböcker.

Om vi för att studera metersystemet närmare vända oss till några allmänt tillgängliga kunskapskällor, få vi bl. a. veta följande.

Tom Moll, Lärobok i fysik, I. (4 uppl. 1908 t. o. m. 7 uppl. 1919) »— — — metern — — — är längden (sådan den är vid en temperatur av noll grader) av en viss platinastav, den s. k. arkivmetern, vilken förvaras i Paris». (Detta är icke alldeles korrekt formulerat. Den egentliga arkivmetern blev museumsföremål 1889, då den ersattes med »den internationella prototypen för metern», varom mera längre fram. Visserligen användes ofta alltjämt »arkivmeter» som populär benämning på omtalade föremål, men i en lärobok är det olämpligt.) »Med mycken möda och stor kostnad hava för de olika länderna förfärdigats noggranna kopior av denna meterstång. En dylik s. k. rikslikare finnes även i Stockholm.» (Rikslikaren avskaffades 1878 och gällde på sin tid svenska *foten;* efter 1878 benämnes motsvarande föremål *riksprototyp.*) Moll lär vidare: »Dragningen» (d. v. s. tyngdkraften) »på en särskild kropp kallas kroppens tyngd eller vikt. — — — 1 gram är vikten av 1 kbcm. 4-gradigt vatten i lufttomt rum, vid 45 graders latitud och vid havsytan». (Detta är ej fullt exakt, varom mera nedan.) »Av praktiska

skäl definieras 1 gr hellre såsom 0,001 av en i Paris förvarad kilogramvikt av platina, »arkivkilogrammet». (Arkivkilogrammet blev i likhet med arkivmetern museumsföremål 1889, varom mera längre fram.)

I alla av Moll utgivna upplagor betraktas således kilogrammet som en *kraftenhet* (såsom fortfarande i teknisk litteratur). T. Rudberg, som utgivit 8 uppl. (1924) och 9 uppl. (1930) av del I, använder kilogrammet som *massenhet* (såsom i vetenskaplig litteratur). Här skiljes mellan *vikt* (= massa) och *tyngd* (= jordens dragningskraft). Vikten mätes med »arkivkilogrammet» som enhet. För tyngd (= kraft) införes enheten *kilogramkraft* = »tyngden av arkivkilogrammet i lufttomt rum, vid 45° latitud och havets nivå». De felaktiga benämningarna (»arkivmeter», »rikslikare» etc.) kvarstå från föregående upplagor. En ny felaktighet har tillkommit i och med att 1 $dm^3$ vatten (av 4°) anges väga 40 mg mindre än 1 kg. Pålitliga tabellverk eller andra dylika källor ha alltsedan omkr. 1908 angivit skillnaden till 27 eller 28 mg. Uppgiften 40 mg återfinnes emellertid i 1906 års upplaga av Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik I: 1, som f. ö. ger en ej helt igenom lyckad framställning av metersystemet, behäftad med tryckfel, vilka fel förfölja framställningen ända in i det välmenta »Nachtrag», som avslutar 1:a boken, där de kulminera.

Tom Moll, V, 8:de uppl. (1928), har i huvudsak samma terminologi som i I, 9:de uppl., med arkivkilogram, 40 mg, o. s. v.; dessutom: »Den riktiga metern definieras numera såsom längden vid 0° av den ursprungligen(!) förfärdigade ... arkivmetern».

C. Bergholm, Lärobok i fysik I, (1922), låter kilogram vara enhet för »massa (= vikt)» men talar om rikslikare för metern, 40 mg, o. s. v. »För att tyngdkraften skall vara entydigt bestämd, måste man därför komma överens om att lägga tyngdkraften på ett visst ställe till grund för bestämning av kraftenheten. Man har valt Paris.» Längre fram talas dock i dylikt samband även om 45° latitud.

S. E. Ohlon, Lärobok i fysik, I (1924) låter även kilogram vara enhet för »massa (= vikt)» och talar om rikslikare, arkivmeter, arkivkilogram, 40 mg, Paris. Ett originellt bidrag är motiveringen:»På grund av att metersystemet har utgått från Paris har man valt denna ort» (nämligen som ort för normal tyngdkraft).

*Nordisk Familjebok*, 2 uppl. (1913), *Metersystemet,* nämner: »För vikten har urspr. blifvit antagen som enhet vikten af 1 kubikcentimeter rent vatten vid + 4°C. vid 45° br. och hafvets nivå, hvilken enhet blifvit kallad *gram*», — alltså ej hänfört till lufttomt rum och ej heller till någon prototyp. »Enär grammet är en alltför liten(!) vikt — — — har för Sverige(!) — - — — blifvit bestämdt, att kilogrammet skall betraktas som hufvudenhet för vikten.» Vad beträffar definitionen notera vi, att 3:e generalkonferensen (1901) beslöt:

»*Le kilogramme est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.*» Detsamma beslöt redan 1:a generalkonferensen (1889) fast med annan formulering. Kilogrammet är alltså numera till sin *definition* fullkomligt frigjord från vattnet. Det blir därför en annan sak att tala om de *praktiska* relationer, som äro förknippade med de olika enheterna. Denna fundamentala skillnad tycks på flera håll ej ha tillbörligen uppmärksammats.

*Nordisk Familjebok,* 3 uppl. (1930) är av den uppfattningen, att man redan år 1791 i metersystemet införde enhet för *massa,* »i nuvarande svensk lag benämnd vikt». — Artikeln, som ger en koncis framställning av metersystemets historia, innehåller tyvärr ett par tryckfel (t. ex. uppgives, att arkivmetern och arkivkilogrammet överlämnades 1798, skall vara 1799, vidare är bilden av meterprototypen felvänd). Däremot finnes ett uttalande, som är välkommet, det är sista raden: »Inom tekniken brukas ofta ordet kilogram såsom beteckning för en kraftenhet». Det ger nyckeln till uppklarande av många missförstånd. Tyvärr skocka sig molnen åter, då vi slå upp art. *Kilogram,* som med-

delar: »K. definieras som vikten av 1 kbdm el. 1 liter rent vatten av 4°C, vägt i lufttomt rum». Det är olyckligt att låta litern vara med att definiera kilogrammet, emedan det ju snarare är tvärtom, varvid dessutom litern blir c:a 27 $mm^3$ större än kubikdecimetern; slutligen hör ju vattnet ej längre till definitionen.

*Svensk Uppslagsbok* (1933) meddelar nästan alldeles riktigt, att »Kilogram ... definieras ss. massan av det i Paris förvarade arkivkilogrammet». Här må dock anmärkas som förut, att det egentliga arkivkilogrammet utmönstrades 1889, och att kilogrammet enl. nu gällande svenska lagstiftning formellt bestämmer en *vikt* i betydelsen *tyngd*.

*Bonniers Konversationslexikon* och *Norstedts Uppslagsbok* lämna lika kortfattade som ovederhäftiga upplysningar om kilogram, metersystem och rikslikare.

*Hütte,* Des Ingenieurs Taschenbuch, I (1920). »Die Einheit der Masse ist die Masse eines 9,80665-kg-Stückes und beträgt 1 kg $sk^2/m$». — »Die Kraft- und insbesondere Gewichtseinheit ist das Kilogramm, d. i. der Schweredruck des vom internationalen Mass- und Gewichtsbureau aufbewahrten Platin-Iridium-Blocks in Sèvres bei Paris (Normalstelle für die Gewichtsbestimmung)». »... In Paris, an der Normalstelle für die Gewichtsbestimmung, ist die Fallbeschleunigung $g_0 = 9{,}80665$ m/sek².»

Man inser visserligen skillnaden mellan den tekniska och den fysikaliska uppfattningen, men uppgiften, att Sèvres har normaltyngd, är felaktig. En senare upplaga (26:e, 1931) skiljer något mera pedagogiskt på det tekniska och det fysikaliska måttsystemet, men vidhåller, att accelerationen i Paris (Sèvres) är 9,80665 m/sek², vilket är oriktigt.

Accelerationen i Pavillon de Breteuil, Sèvres, (48° 49′ 53″ latitud, 74,4 m ö. h.) är i verkligheten uppmätt till 9,80991 m/sek². För att reducera detta värde till »45° lat., havsytans nivå» godkände 3:e generalkonferensen (1901) reduktionsfaktorn $\frac{1}{1{,}0003322}$, som ger värdet 9,80665 m/sek². Detta

senare värde har antagits definiera normaltyngd, något som dock innebär en konventionell överenskommelse, ty en direkt mätning av accelerationen vid 45° lat., havsytans nivå, har senare givit det faktiska värdet 9,80623 m/sek$^2$. Accelerationen i Paris (observatoriet, 48° 50′ 11″ lat.) är 9,80943 m/sek$^2$.

### *Ur metersystemets historia.*

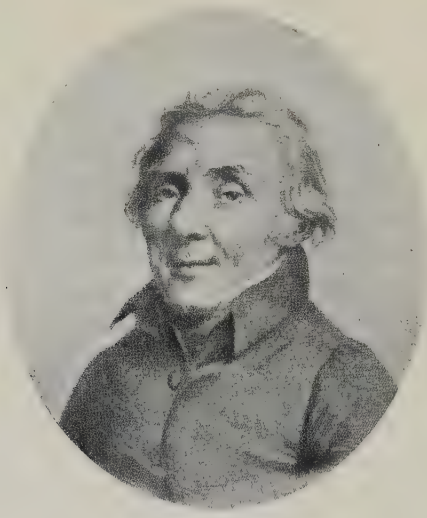
Efter dessa irrfärder ha vi behov av att samla oss och vilja därför (på basis av de källor, som anföras i litteraturförteckningen) söka bilda oss en riktig uppfattning av vissa centrala frågor i samband med utvecklingen av meter och kilogram, varvid vi förutsätta huvuddragen av metersystemets historia bekant. Vi notera först, att metersystemet infördes i Frankrike med den brådska, som brukar vara vanlig vid en revolution. Därför nöjde man sig till en början med ett provisoriskt värde på metern, som beräknats ur äldre gradmätningar.

Det egendomliga inträffade härvid, att den provisoriska metern faktiskt blev i närmare överensstämmelse med den teoretiska definitionen än vad vår nuvarande meter är. Den provisoriska metern beräknades (1793) till 3 fot 11,44 linjer på basis av LACAILLES mätningar från år 1740. Den definitiva uppgavs senare (enl. lag av 19 frimaire år VIII = 10 dec. 1799) vara 3 fot 11,296 linjer. Den provisoriska var alltså 0,144 linjer eller 0,325 mm längre. Enligt modärna mätningar [1] antages bästa värdet på längden av meridiankvadranten f. n. vara 10002288,3 m. Alltså är vår nuvarande meter 0,229 mm *kortare* än definitionen. Den provisoriska från 1793 var följaktligen endast 0,096 mm för *lång*, vilket hos en meterstav av mässing motsvarar värmeutvidgningen för 5° C.

Kilogrammet — som då ännu kallades *grave* — var svårt att provisoriskt fixera, bl. a. därför att själva myntverkets vikter (»poids de Charlemagne») ej stämde tillräckligt väl

[1] International Critical Tables: I (1926) sid. 394.

överens inbördes. Man avsåg ursprungligen att i definitionen låta vattnet ha temp. 0°, vilket snart ändrades till temp. för vattnets maximala täthet, enär man då undvek att hänföra temp. till en viss skala. Något siffermässigt värde på ett provisoriskt kilogram (grave) fastslogs ej genom någon lag, men provisoriska vikter (av såväl koppar som platina) framställdes.



LEFÈVRE-GINEAU.

Akademien, som enligt uppdrag arbetade på att fullkomna systemet, råkade bli upphävd av ett dekret några dagar efter det att Nationalkonventet d. 1 aug. 1793 antagit det provisoriska värdet på metern, varför arbetet tidvis gick trögt. Det hände dessutom sådana malörer som att LAVOISIER, som fått i uppdrag att noga bestämma vikten av en känd volym rent vatten, råkade bli avrättad (1794) innan han fått sitt arbete[1] slutfört. Men det hela skred likväl

[1] Ett bevarat preliminärt värde på LAVOISIERS kilogram (från jan. 1793) är 18848.25 grains, vilket passar bra samman med den provisoriska metern. LEFÈVRE-GINEAUS kilogram vägde 18827.15 grains, men dessa båda grains äro ej fullt identiska, fastän hörande till »poids de Charlemagne».

framåt. Louis Lefèvre-Gineau tillverkade (delvis i samarbete med Fabbroni) med skicklighet, gynnad av en viss tur, ett nytt kilogram. Han tillverkade först en sluten, ihålig mässingscylinder, 243,5 mm i diameter och lika hög, vägande c:a 11,3 kg, vars inre kommunicerade med ytterluften genom ett 1,285 mm tjockt rör. Nedhängd i vatten förlorade den större delen av sin vikt, differensen (c:a 200 g) kunde noga bestämmas. Vägd i luft med mässingsvikter erhöll man samma vikt som i tomrum. Efter korrektion bl. a. för luftens upptryck vid det hydrostatiska försöket och omsorgsfull uppmätning av cylinderns dimensioner blev det sålunda möjligt att härleda kilogrammet ur metern. Det fel, som slutligen kvarstod, råkade (man kan säga, genom en lycklig slump, ty luftens egenskaper voro endast ofullständigt kända) bli så obetydligt,[1] att det dröjde över 100 år, innan man med någon säkerhet fann det. Och under tiden hade från skilda håll såväl positiva som negativa korrektioner föreslagits, varierande inom ett område av mer än 0,7 gram.

Den 4 messidor i frihetens VII år ($^{22}/_{6}$ 1799) mottog den lagstiftande församlingen en meter- och en kilogramprototyp, vilka högtidligen deponerades i republikens arkiv och fingo namnen »mètre des Archives» och »kilogramme des Archives». Båda voro tillverkade av ren, mjuk platina,[2] vilket material ej är fullt lämpligt. Dock fungerade de intill 1889, då *båda* de gamla normalerna ersattes med nya, kopierade efter de gamlas angivelser. Materialet i de nya

[1] Kilogrammet anses f. n. vara $27 \pm 2$ mg tyngre än massan av 1 $dm^3$ dest. vatten vid temp. för dess största täthet och under normalt atmosfärstryck. Trots vattnets obetydliga kompressibilitet räcker $^1/_2$ atm. övertryck att låta samma volym vatten få massan precis 1 kg. En droppe ur en vanlig vattenledningskran (med 10 mm inre diam) väger c:a 230 mg. Felet är alltså mindre än $^1/_8$ dylik droppe. Jfr J. Tandberg: »Vad väger 1 kubikdecimeter vatten?», denna tidskr. 1933, sid. 21.

[2] Man kunde ännu ej gjuta större platinaföremål utan tillverkade dylika genom att hamra samman ren platinasvamp, framställd genom reduktion av platinasalter i vattenlösning.

prototyperna är platina-iridium (90% Pt, 10% Ir) som är hårdare och stabilare än ren platina.

Den gamla *arkivmetern* (1799) var ett ändmått av rektangulär genomskärning (25 × 4 mm). Den nu gällande *internationella prototypen för metern* är av X-formig genomskärning (se fig. 1) med en total längd av 102 cm och är ett streck-mått. Utseendet av ett ändstreck framgår av fig. 2, som i 85 ggr förstoring visar området kring ena ändstrecket hos en av metrarna från år 1889. Man ser tre

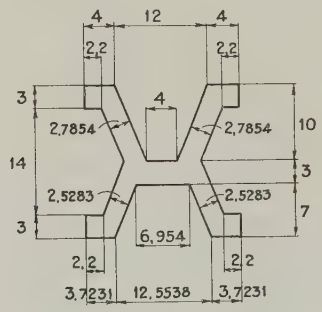



Fig. 1

Meterprototyp i genomskärning, naturlig storlek, måtten i mm. Area 150,923 mm². Prototypens massa 3,3 kg.

parallella streck, de båda yttre äro »hjälpstreck» på 1 mm avstånd från varandra, mellan dem är »huvudstrecket», som gäller för meterns angivande. Och närmare bestämt skall man vid komparering ställa in mikroskopet på den punkt av huvudstrecket, som befinner sig mitt emellan de båda mot huvudstrecket vinkelräta, sinsemellan parallella begränsningslinjerna med 0,2 mm avstånd från varandra. Strecken äro anbragta på den 4 mm breda, spegelblanka yta, som går genom tyngdpunkten av genomskärningsfiguren (se fig. 1). Hur man vidare skall förfara vid upplägggningen av en prototyp för mätningsändamål, framgår av följande stipulation (1927):

*»L'unité de longueur est le Mètre, défini par la distance, à 0°, des axes des deux traits médians tracés sur la barre de platine iridié déposée au Bureau international des Poids et Mesures, et déclarée Prototype du Mètre par la Première Conférence générale des Poids et Mesures, cette règle étant soumise à*[1] *la pression atmosphérique normale et supportée par deux rouleaux d'au moins un centimètre de diamètre, situés symétriquement dans un même plan horizontal et à la distance de 571 mm l'un de lautre.»*

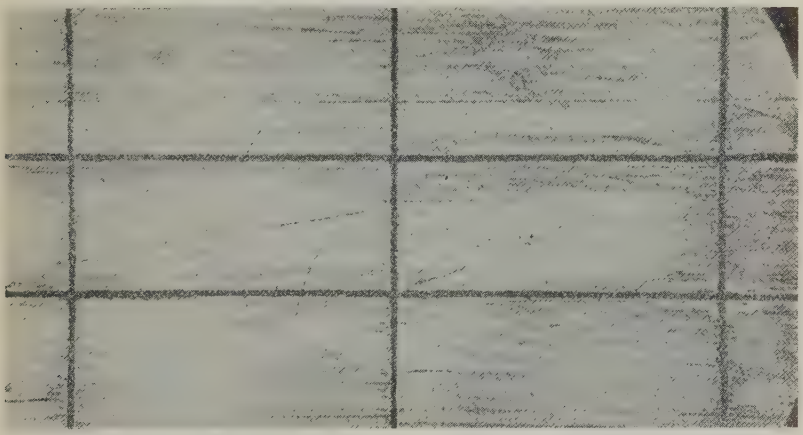


Fig. 2. Ena ändstrecket (i mitten av fig.) på en meterprototyp, 85 ggr. förstoring.

Den nu gällande *internationella prototypen för kilogrammet* tillverkades jämte två andra dylika normaler 1879. I ojusterad form hade de tre normalerna levererats av Londonfirman Johnson, Matthey & Co. och sedan i Paris bearbetats med myntverkets största präss för att få så stor täthet som möjligt. Av dessa tre normaler, ursprungligen benämnda KI, KII och KIII, befanns KIII efter justeringen ha råkat bli så nära lika med arkivkilogrammet i vikt, redu-

[1] Lämpligen borde här tilläggas: *»l'intensité normale de la pesanteur»*, ty ett barometertryck kan vara normalt, utan att tyngdkraften samtidigt måste vara det, oaktat den senare ingår i definitionen av det förra.

cerat till vakuum, att skillnaden var mindre än $\pm$ 0,01 mg och icke med säkerhet mätbar. Denna KIII upphöjdes 1883 förslagsvis till internationell prototyp, vilket godkändes och fastslogs av första internationella generalkonferensen 1889. Den bär icke något märke ingraverat, är en massiv cylinder av 39 mm höjd och lika stor diameter, med lätt avrundade kanter, har volymen 46,10052 milliliter (sp. v. 21,55148) vid 0°. Det gamla arkivkilogrammet hade volymen 48,6712 ml (sp. v. 20,5460) vid 0°.

Ytterligare 40 normaler beställdes 1882 från Johnson, Matthey & Co. till ett pris av 2000 Fr. stycket för metallen och 150 Fr. i formkostnad. De levererades 1884, utsattes upprepade gånger för högt tryck (360 ton), justerades och komparerades slutligen noga såväl inbördes som med den tidigare (1883) utvalda internationella prototypen. Slutligen fördelades huvudparten genom lottning bland de olika nationerna. Sverige erhöll (1889) sålunda No. 40, med volymen 46,410 ml (sp. v. 21,547) och massan 1 kg — 0,037 mg $\pm$ $\pm$ 0,002 mg enl. samtida bestämning. En dylik nationell prototyp förvaras under dubbla glaskupor, stående på en polerad kvartsplatta (se fig. 3).

Sverige erhöll samtidigt meterprototypen No. 29 med längden 1 m — 2,50 $\mu$ $\pm$ 0,10 $\mu$ vid 0° (enl. senaste komparering 1920—21).

De svenska *riksprototyperna* förvaras av Kungl. Vetenskapsakademien i ett valv i dess byggnad vid Frescati. De komma endast till användning en gång vart 10:e år, då de kompareras med Sveriges båda *huvudlikare,* vilka förvaras av Mynt- och justeringsverket och gälla som »yttersta efterrättelse» vid denna institutions arbete. Med kilogrammets huvudlikare kompareras sedan en *reservlikare* [1] och med denna

[1] Även reservlikaren brukar vart 10:de år kompareras med riksprototypen i samband med huvudlikarens komparering. Enl. K.F. $^{26}/_{6}$ 1890 må huvudlikaren »endast användas till jämförelse med kontroll- och justeringsbyråns kontroll- och arbetslikare ävensom där sådant för rättstvists avgörande skulle erfordras».

flera *arbetslikare*. Vid bruket korrigeras en huvudlikares angivelser i enlighet med de resultat, som ernåtts vid senaste komparering med motsvarande riksprototyp, vars angivelser åter tolkas i enlighet med gällande certifikat (f. n. av år 1889) från Bureau international des Poids et Mesures.[1] Kedjan knytes sålunda vid en justering av en vikt (lödja) över den närmast använda arbetslikaren, reservlikaren,

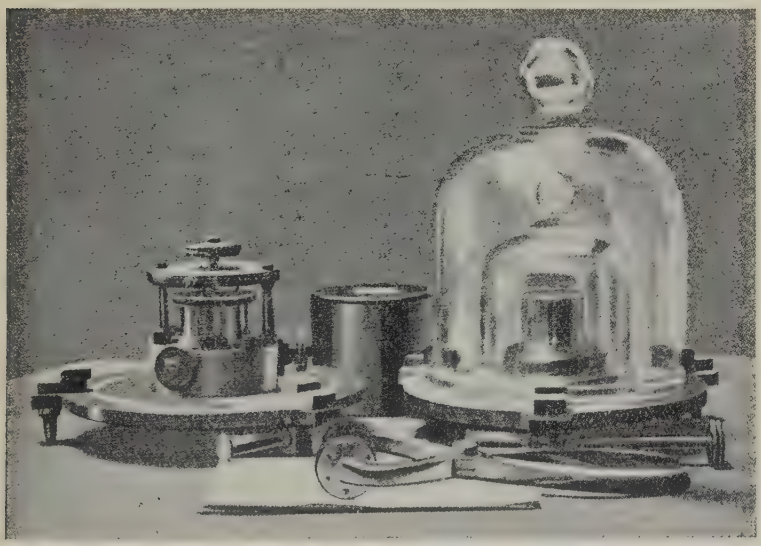


Fig. 3. Kilogramprototyp i transportetui (t. v.) med avtaget lock (i mitten av fig.) och i förvaringskammare (t. h.) bestående av dubbla glaskupor. I förgrunden: tång för hanterande av en prototyp.

huvudlikaren och riksprototypen till den internationella prototypen, och vore, fysikaliskt sett, mycket vacker, om man även hela vägen toge hänsyn till luftens upptryck och justerade vikterna efter deras verkliga massa, något som ej påbjudes i nu gällande lag ens för precisionsvikter. (Dock tages dylik hänsyn vid bestämning av massa.)

[1] Lagen nämner intet härom, varför en bokstavlig tolkning av gällande lagtext faktiskt leder till att riksprototypen är sig själv nog.

### *Ändrad lagstiftning?*

Det har länge varit ett önskemål, att vår lagstiftning om mått och vikt skulle revideras. Att så är behövligt, framgår delvis av det föregående. Mynt- och justeringsverket framlade dels 1918, dels 1926 förslag till ny lagstiftning, där kilogrammet klart och tydligt göres till enhet för massa. Bl. a. upptagas även bestämmelser för mekaniska, elektriska och andra fysikaliska storheter, vilket är önskvärt. Att anmärkningar kunna göras beträffande enstaka detaljer, har ej längre aktuellt intresse. Ett nytt förslag framlades 1931 av tillkallade sakkunniga. I detta »Betänkande angående ändrad lagstiftning om mått och vikt» förslås,[1] att kilogrammet göres till enhet för massa, men i motiveringen påpekas bl. a. möjligheten att skilja på begreppen vikt och tyngd, »vilka i allmänt språkbruk äro liktydiga, men som givetvis i lag och vetenskapligt bruk skulle kunna tilläggas olika betydelser, så att ordet vikt bleve uttryck för massa och ordet tyngd för kraft». Någon kristallklar lagtext skulle ej vara att förvänta på denna basis. Vidare uttalas: »Vid metersystemets införande avsågs emellertid icke, att kilogrammet skulle vara enhet för kraft utan för massa». Detta kan diskuteras. Att man vid formuleringen av den svenska lagen både 1878 och 1885 läto *vikt* och *tyngd* vara synonymer är uppenbart. I Frankrike glömde man visserligen under flera år att stipulera, att vikten av vattnet skulle hänföras till lufttomt rum, men däri inlades säkerligen ingen djupare mening och misstaget rättades 1837. En äldre formulering ($^7/_4$ 1795) lyder: »*Gramme, le poids absolu d'un volume d'eau pure égal au cube de la centième parti du mètre, et à la température de la glace fondante*». Här avses helt sannolikt med »poids absolu» endast att luftens upptryck skall elimineras. — I Betänkandets motivering (1931) anföres riktigt nog beträffande begreppet vikt: »— — — i

[1] Här föreslås bl. a. även att riksprototyperna skola förvaras av mynt- och justeringsverket.

allmänt språkbruk avses mängden av materia». Den ungerska lagen av $^{10}/_{1}$ 1907 inför en dylik förklaring i lagtexten, men använder det vetenskapligt entydiga begreppet massa.

När man väger i luft och försummar luftens upptryck, blir felet numeriskt lika stort, om man väger mässing med platinavikter eller platina med mässingsvikter. I Betänkandets förslag till justeringsförordning stipuleras (10 § 3 mom.): »Som material är tillåtet: — — — mässing och brons för vikter på lägst 1 gram, — — — aluminium och platina (!) för vikter på högst 5 decigram». Därmed blir det olagligt att — även som allmän handelsvikt för handel med mässing — använda de fina prototyperna från Internationella byrån, ja, själva riksprototypen är oduglig. Avsikten är god, nämligen att i vissa fall nedbringa felet från luftens upptryck, men åtgärden torde få betraktas som mera lyckad ur juridisk än ur fysikalisk synpunkt.

### »*Rent vatten*».

Fastän metern frigjorts från meridiankvadranten och kilogrammet från kubikdecimetern återstår likväl alltjämt ett nära samband med vattnet, dels i literns definition, dels i temperaturbestämningen 0°. Man har hittills alltid förutsatt, att rent vatten *(d'eau pure)* eller destillerat vatten skulle vara en enhetlig, väldefinierad substans. Så är icke fallet. Det har visat sig, att väte förekommer dels med atomvikten[1] $1{,}_{00778}$ ($^{1}$H) dels med $2{,}_{01351}$ ($^{2}$H), om än den senare formen förekommer i ringa mängd, c:a $0{,}_{02}$ % av hela vätemängden. Syre förekommer med atomvikterna 16 och (approximativt) 17 och 18. Härav kunna vi för vatten vänta oss 9 olika kombinationer: $^{1}_{1}\mathrm{H}\,^{1}_{1}\mathrm{H}\,^{16}\mathrm{O}$; $^{1}_{1}\mathrm{H}\,^{2}_{1}\mathrm{H}\,^{16}\mathrm{O}$; $^{2}_{1}\mathrm{H}\,^{2}_{1}\mathrm{H}\,^{16}\mathrm{O}$; $^{1}_{1}\mathrm{H}\,^{1}_{1}\mathrm{H}\,^{17}\mathrm{O}$ . . . o. s. v. Vid elektrolys av vatten går

[1] Fysikaliska atomvikter hänförda till $^{16}\mathrm{O} = 16$.

det lättare vätet bort i början; den sista resten i elektrolyskärlet är anrikat på »tungt» vatten av huvudsaklig sammansättning $H^{1}_{1}H^{2}_{1}O^{16}$ och $H^{2}_{1}H^{2}_{1}O^{16}$. Lewis m. fl. ha nyligen isolerat dylikt vatten. Det hade sp. v. 1,1056 vid 25°, smältpunkt + 3,8° C, kokpunkt + 101,42° C och täthetsmaximum vid + 11,6° C. Beroende på hur man renar och destillerar vatten är det möjligt att i någon mån få sammansättningen ändrad. Det har visat sig, att destillation i kolonnapparat givit skillnader i sp. v., som svarat mot 60 mg eller mera per liter.

Ännu är icke metersystemet slutgiltigt formulerat, ännu vänta fundamentala begrepp på entydig formulering och skarp definition.

Ännu är frågan öppen huruvida »rent vatten» har identiskt samma sp. v., om det framställts ur regnvatten eller ur vatten från världshavets djup, ur gammal snö eller ur vårens första rännil.

Litteratur.

G. Bigourdan, Le Système métrique des Poids et Mesures. Paris 1901.
C. E. Guillaume, La création du Bureau international des Poids et Mesures et son oeuvre. Paris 1927.
— — Les récents progrès du Système métrique. Paris 1907, 1913, 1921.
— — La Convention du mètre et le Bureau international des poids et mesures. Paris 1902.
Comité International des Poids et Mesures. Procès-Verbaux des Séances. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures.

---

*Tillägg till korr:*

Av utrymmesskäl har ovanstående uppsats fått stå över från föreg. årg:s dec.-häfte. K. Maj:t har till innev. års (1934) riksdag avlämnat en proposition Nr. 97, »Förslag till Lag om mått och vikt». Förslaget, som huvudsakligen är baserat på 1931 års Betänkande, likställer *vikt* = *massa*, inför enheterna *mil*, *mikron* och *milliliter*, låter förkortningarna (kg etc.) vara utan punkt, men lämnar ingen upplysning om huruvida man skall säga *en* el. *ett* ton. Lagen är avsedd att träda i kraft d. 1 juli 1935.

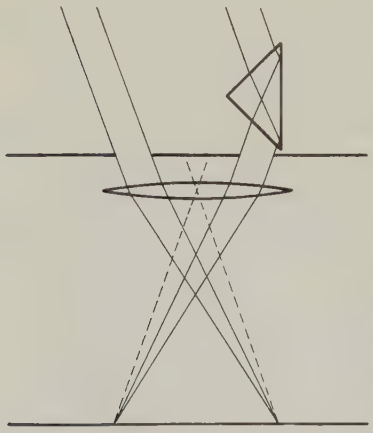
# Ett nytt solur.

Av **HANS GERTZ.**

Parallella strålar falla genom två bländöppningar i en skärm (se fig.). Genom den ena gå de fritt. Före infallet i den andra öppningen genomgå strålarna ett rätvinkligt prisma, vars hypotenusayta står vinkelrätt mot bländskärmen och mot det normalplan till skärmen, som innehåller strålriktningen (figurens plan). Dessa strålar, totalreflekterade vid prismats hypotenusayta, gå då genom öppningen i en riktning symmetrisk till infallsriktningen. En positiv lins bakom bländskärmen uppfångar samtliga strålar från båda bländöppningarna och sammanbryter dem till två punkter i sitt fokalplan, på en däri anbragt vit skärm. Denna anordning uppställd mot solen ger två solbilder, i stället för nämnda ljuspunkter, varvid den bild, som danas av strålar, vilka genomgått prismat, faller på samma sida om hypotenusaytans plan som solen. Så länge solen i sin dagliga rörelse ännu icke uppnått nämnda plan, vandra solbilderna å skärmen mot varandra. De sammanfalla i det ögonblick solens mitt står i hypotenusaytans plan varefter de gå isär. Deras inbördes gånghastighet, den ena bildens i förhållande till den andra, är dubbelt så stor som vardera bildens gånghastighet på skärmen. I solur av vanlig konstruktion bestämmes avläsningens skärpa av sistnämnda hastighet. Vid här angiven anordning kan sålunda bestämningen väntas bli dubbelt noggrannare. Särskilt bör detta gälla om bestämningen av det ögonblick, då bildernas mot gångriktningen vinkelräta diametrar passera varandra.

I detalj kan observationsförfarandet gestaltas på skilda sätt. Med fördel uppfångas bilderna på en snedställd skärm,

så att de bli lagom avlånga, utdragna i strålriktningen. Skärmen vrides något mot eller från horisontalplanet med bildernas centra i linsens fokalplan. Därtill kan lämpligen den ena bilden deplaceras något litet i strålriktningen (med hjälp av ett svagt devierande prisma), så att bilderna endast å ett mittparti passera över varandra. Då iakttages strax före deras maximaldiametrars koincidens en svagt asymmetrisk ställning av bilderna, och man markerar tiden, då denna asymmetri är nätt och jämt märkbar. Efter maximaldimetrarnas passage uppträder ett liknande, nätt och jämt märkbart asymmetriläge, för vilket åter tiden observeras. Jag har funnit tidsintervallet mellan dessa båda observationer uppgå till endast 3 à 4 sekunder. Som tid för maximaldiametrarnas passage kan då tagas ögonblicket mitt emellan. Visserligen äro de sålunda angivna asymmetrierna icke alldeles lika stora, men de äro säkerligen liknande stora, vadan det antagna passageögonblicket torde vara behäftat med ganska ringa fel, troligen mindre än 1 sekund.



Ett andra förfaringssätt är att genom två (dioptriskt nog exakta) färgfiltra, anbragta framför eller bakom bländöppningarna, göra bilderna olikfärgade, bäst i komplementärfärger. Då synes bildernas täckningsområde i additionsfärg, och redan en ringa asymmetri i deras läge förråder sig genom olika färgkonturering. Härvid måste emellertid uppställningen göras optiskt symmetrisk, i avseende på färgspridning. Man anbringar bländöppningarna — icke såsom i fig. sida vid sida, utan — vertikalt, med centra i ett plan parallellt med prismats hypotenusayta. Då undgås även den

(ringa) förändring i passagens tid, som uppstår, om skärmen ställes något framför eller bakom linsens fokus.

Man kan använda tre öppningar i bländskärmen, en fri, de två övriga med var sitt prisma, vilkas hypotenusaytor stå nära, men icke fullt parallellt. Av de tre bilder, som därmed fås, vandra två med fast inbördes vinkelavstånd i motsatt riktning mot den tredje. Prismernas inbördes vinkel väljes exempelvis sådan, att motsvarande bilder falla varandra något litet närmare än en bilds bredd. Den tredje bilden vandrar då först över den närmaste prismabilden, varvid tiderna för två närmaste asymmetrilägen bestämmas som ovan, vandrar sedan över prismabildernas mellanrum, varvid två liknande asymmetrilägen kunna markeras, vandrar slutligen över andra prismabilden, vilket ger ytterligare två bestämningar sådana som de första. Man har fördelen av sex bestämningar, symmetriskt ordnade kring det ögonblick som sökes.

Även för bestämningen av ett visst inbördes avstånd mellan solbilderna, d. v. s. av andra tidsmoment än passagens, gives en enkel observationsmetod, den stereoskopiska. Man förenar båda solbilderna binokulärt, lämpligen med ett linsstereoskop (icke gärna med ett Brewsters prismastereoskop, vilket ger starkt asymmetrisk färgspridning). Då ses den binokulära solbilden närma eller avlägsna sig, allteftersom de båda solbilderna inbördes så göra. I stereoskopet anbringas därtill ett eller flera fasta binokulära jämförelseobjekt, förbi vilka sålunda den binokulära solbilden passerar. Man ser denna senare på ett säreget, liksom smygande sätt röra sig i djupriktning, och kan ganska väl fastställa, liksom ovan, två ögonblick: då bilden ifråga står strax bakom och strax framom ett av de fasta objekten. Detta sistnämnda, representerat av distansen mellan de båda förenade monokulära objekten, angiver då solbildernas inbördes avstånd i tidsmomentet (ungefär) mitt emellan båda observationerna.

För att på samma sätt bestämma även större avstånd

mellan solbilderna kan användas en telestereoskopisk anordning, eller enklast stereoskopi med korsade blicklinjer.

Ett ytterligare förfaringssätt är att taga en serie fotografier av solbilderna, i bestämda tidsmoment, och sedan mäta bildernas avstånd å fotogrammen (vilket även kan ske stereoskopiskt). Man torde häri äga en enkel metod för objektiv registrering av en himlakropps passage.

Om i först beskrivna fall, det i fig. återgivna, strålreflexionens plan (figurens plan) tänkes vertikalt, så varierar solbildernas inbördes avstånd med solens höjd. När solens centrum står i hypotenusaytans plan, sammanfalla solbilderna och gå isär, då solens höjd ändras. Denna höjdändring återgives fördubblad av vinkeln mellan riktningarna från linsens optiska centrum (strängare dess andra huvudpunkt) till solbildernas centra. På sådant sätt kan solens höjdändring känsligt iakttagas.

En kikare, framför vars halva objektiv-öppning ett rätvinkligt prisma är anbragt såsom i figuren ovan, tillåter observation av stjärnpassager genom hypotenusaytans plan. Stjärnan ses i dubbelbilder, vilka skrida varandra allt närmare, i mån som stjärnan närmar sig passagen, och sammanfalla i passageögonblicket.

En kombination mellan ett solur och ett maskinellt ur erhålles, om anordningen i fig. monteras på axeln av ett ur, och denna axel är parallell med himlavalvets vridningsaxel. Roterar urets axel motsols 23 gånger på ett dygn, så inträffar koincidens av solbilderna 1 gång i timmen, under solens dagbåge. Koincidens äger rum varje halvtimme, om endast prismat roterar, som nyss beskrivits, men linsen med skärmen roterar medsols 1 gång på dygnet, med linsaxeln riktad mot solen.

Här, såsom eljest ofta, befinnas vid sidan av fördelen, som anordningen erbjuder, stå vissa särskilda olägenheter eller svårigheter. Vid korrekt uppställning skulle prismats hypotenusayta falla i meridianen, eller i en annan timcirkels plan. Detta är med enkla medel svårt att åstadkomma, nöj-

aktigt nära. Det är även i allmänhet önskvärt att ha anordningen monterad vridbar — efter solens olika deklination — i nyssnämnda plan. Rätt orientering av denna vridningsaxel är en andra, lika delikat sak. Man har emellertid ett brukbart enkelt prov på prismats riktiga läge å axeln. Vrides denna med prismat, så måste motsvarande solbild förbli orubbad. Den numera lätt erhållna tidsbestämningen med radiosignal ger vidare ett enkelt medel att systematiskt kontrollera eller bestämma en uppgiven uppställning. Man observerar med ett vanligt någorlunda gott ur solpassagen i närheten av tidssignalen, och därpå — eller strax dessförinnan — denna senare. Urets dragning under den korta mellantiden kan då antingen försummas eller nöjaktigt anslås.

Att här beskrivna enkla anordning skulle vara »något nytt under solen», har synts mig tämligen osannolikt. Då jag dock ej lyckats erfara någon vidkommande historisk notis, har jag trott metoden i varje fall vara nog litet känd för att kunna i sådan inskränktare mening kallas ny och därmed förtjäna publikation. Sedan ovanstående avfattats, har emellertid Dr. N. V. E. Nordenmark benäget bragt till min kännedom, att i Delambre's »Histoire de l'astronomie du dix-huitième siècle», 1827, omnämnes (p. 751) en »Lunette diplantidienne», angiven av E. S. Jeaurat, vilken förverkligar samma princip ehuru på ett rätt invecklat sätt. Om i en vanlig omvändande kikare urtages ett centralt parti av objektivet och i öppningen insättes främre delen av en rättvändande kikare, medan okularet förblir gemensamt för båda, så skall i en sådan kikare en stjärna synas enkel endast då den faller i optiska axeln, men eljest dubbel. Apparatens komplikation torde lämna förklaringen till, att den icke vunnit användning. Det enklaste medlet att åstadkomma den önskade optiska dubbleringen är tydligen ett rätvinkligt prisma, anbragt framför halva objektivöppningen, såsom ovan är anfört.

---

## Bestämning av vattnets ångbildningsvärme med doppvärmare och termosflaska.

I senaste junihäftet av denna tidskrift redogjordes för hur konstanten i Joules lag enligt en kompensationsmetod kunde bestämmas medelst doppvärmare och termosflaska.[1] Med samma materiell och enligt en liknande metod kan isens smältvärme bestämmas.

Även för bestämning av vattnets ångbildningsvärme lämpar sig ovannämnda materiell. Tillvägagångssättet är följande. Vatten i termosflaskan uppvärmes medelst doppvärmaren, tills det kommer i kokning. Doppvärmaren är förd genom termosflaskans kork genom vilken även går ett glasrör, som den bortgående vattenångan får passera. När vattnet kommit ordentligt i kokning, brytes strömmen. Ångröret korkas, och termosflaskan med doppvärmaren väges. Därefter slutes strömmen ånyo, korken till ångledningsröret borttages, och en viss mängd vatten bortkokas. Det bortkokade vattnets vikt bestämmes genom ny vägning. Spänning, strömstyrka och tid observeras. Joules konstant antages vara bekant. Den värmemängd, som tillförts, kan anses uteslutande ha åtgått för ångbildningen. Ekvationen för beräkning av ångbildningsvärmet blir alltså

$$0{,}239 \cdot 105 \cdot 0{,}65 \cdot 1260 = 37{,}5\ x.$$

Siffrorna äro tagna ur vidstående tabell, som innehåller några siffror från elevlaborationer.

| $V$ volt | $I$ amp. | Tid sek. | Vattenånga gr. | Ångbildningsvärme |
|---|---|---|---|---|
| 105 | 0,65 | 1260 | 37,5 | 548 |
| 170 | 1,12 | 1200 | 98,4 | 556 |
| 172 | 1,13 | 1200 | 99,0 | 563 |
| 137 | 0,94 | 1800 | 100,9 | 549 |

I allmänhet ligga de erhållna värdena någon procent för högt beroende på att trots mycket god värmeisolering något värme alltid går bort genom ledning o. s. v. Detta kan man lätt nog korrigera för, men jag anser det onödigt på det här ifrågavarande stadiet.

*Edvin Jönsson.*

[1] Årg. *16*, sid. 106.

## Objektiv demonstration av natriumlinjens omvändning.

För att kunna objektivt demonstrera natriumlinjens omvändning måste man ha möjlighet att åstadkomma dels en natriumlåga av stor intensitet dels ett kontinuerligt spektrum av tillräcklig renhet och ljusstyrka.

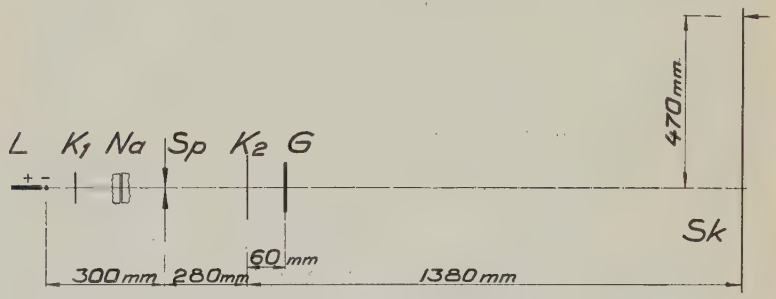
I allmänhet torde största uppmärksamheten ägnas åt den förstnämnda förutsättningen. Det finns konstruerade särskilda brännare avsedda för metalliskt natrium. Med dem erhåller man ett intensivt ljus, som kan möjliggöra demonstrationens utförande, även då spektret ej är förstklassigt. Emellertid äro dessa brännare ganska obehagliga att handhava i synnerhet för experimentatorer, som ha ringa vana att handskas med kemikalier. Ofta kan man icke uppnå mer än ett kortvarigt uppflammande, varvid den mörka linjen endast för ett ögonblick framträder i spektret. Det är därför synnerligen fördelaktigt, om man kan anordna experimentet så, att den intensitet hos natriumlågan, som kan uppnås med enklare och bekvämare hjälpmedel, är tillräcklig.

En vanlig och bra metod att erhålla en natriumlåga är att i lågan från en bunsenbrännare införa ett stycke asbestpapper, indränkt med mättad koksaltlösning. Ännu lämpligare än koksalt är emellertid bromnatrium. Lågan får mycket stor intensitet och lämplig form, om den får passera genom en 5 mm bred springa mellan två, bredvid varandra lagda stycken av asbestpapp. Dessa placeras på en hållare ungefär 15 mm ovanför brännarens mynning.

Det erbjuder tyvärr svårigheter att med ett enkelt prisma åstadkomma det kontinuerliga spektret. Har man till sitt förfogande ett bra gitter eller ett raksiktigt prisma av ej alltför små dimensioner, är saken enkel. Övriga behövliga instrument finnas säkerligen på varje h. a. läroverk.

I figuren återges en anordning, som använts av förf. på Lunds högre allmänna läroverk. Måtten kunna varieras inom vida gränser. *Na* är en natriumlåga av ovan beskrivna typ. *G* är ett gitter: »Thorps Transparent Replica of Rowland Metal Diffraction Grating» med 571 streck per mm och av mycket hög kvalitet. Totala streckantalet är nära 30 000. *L* är en liten självreglerande båglampa med tillhörande lins $K_1$. Ljuset från lampan belyser

spalten *Sp*. $K_2$ är en vanlig lupp med 90 mm diameter och 230 mm brännvidd. Den inställes så, att man får en skarp bild av spalten på skärmen *Sk*. Spaltbredden kan vara 1/3 à 1/2 mm. Genom förskjutning av båglampans lins uppnås, att så mycket ljus som möjligt faller på luppen. Först nu sättes gittret på sin plats. Man erhåller spektra av första, andra och tredje ordningen. På vanligt sätt kontrolleras, att gittrets inställning är korrekt. Då skall dels det från gittret reflekterade oböjda strålknippet falla symmetriskt mot spalten, dels skola spektra ligga i jämhöjd med den direkta spaltbilden. Tändes så lågan, framträder den mörka natriumlinjen omedelbart i första ordningens spektrum. Genom en obetydlig förskjutning av skärmen uppnås full skärpa. Om ljus-




knippet från lampan ej täcker hela spalten, ser man i den mörka linjens förlängning natriumlinjen ljus. Uppmäter man avstånden från gitter till skärm och från den ursprungliga spaltbilden till natriumlinjen, kan man beräkna våglängden med förbluffande noggrannhet.

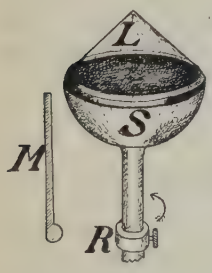
Demonstrationen kan även utföras med användande av ett raksiktigt prisma i stället för gittret men med i övrigt oförändrad uppställning. Förf. har använt ett raksiktigt spektroskop, på vilket kollimator och kikare avskruvats. Prismats tvärsnittsyta var $20 \times 25$ mm.

Givetvis är det av största vikt, att ett gitter av hög kvalitet finnes i varje läroverks samling av fysiska instrument. Det är även mycket fördelaktigt att förfoga över ett raksiktigt prisma av sådana dimensioner, att man därmed kan objektivt demonstrera t. ex. linjespektra. Inställningen sker mycket lättare än med ett vanligt prisma. Instrumentets betydelse kan dock på intet sätt jämföras med gittrets. Har man emellertid möjlighet att välja, torde det i regel vara ur pedagogisk synpunkt lämpligast att för här ifrågavarande demonstration använda det raksiktiga prismat.

*Sten Friberg.*

# Newtons färgringar i en roterande vätskelamell.

I de anvisningar, som till läsåret 1933—34 utfärdades rörande omfattningen av realgymnasiets fysikkurser enligt senaste kursplan, anges, att man vid det inledande studiet av ljusets interferens bör behandla »Newtons färgringar eller något annat därmed jämförligt fenomen». Därvid torde nedan beskrivna lilla apparat kunna komma till användning. Till sin princip är den angiven av den engelske fysikern C. V. Boys för många år sedan.




Apparaten — avsedd för framställning av interferensringar i en lamell av såplösning — består av en halvsfärisk, inuti svärtad metallskål (A), som medelst en på dess utsida anbragt metallstav kan fästas på en rotationsmaskin (R). Med en lämpligt formad metallplåt (M), doppad i såplösning, åstadkommes genom försiktig strykning en lamell över skålöppningen, som därefter täckes med ett koniskt celluloidlock. Detta skyddar lamellen för avdunstning, luftströmmar o. d. Sedan apparaten med lodrät axel anbringats i rotationsmaskinen, sättes denna i gång, varvid hinnan centrifugeras och blir tunnast i mitten. Betraktas lamellen i reflekterat dagsljus[1] (ev. också i monokromatiskt ljus) observeras omedelbart koncentriska, olikfärgade vackra interferensringar runt dess centrum. Färgerna växla allteftersom lamellens tjocklek ändras genom rotationen. Slutligen uppstår i mitten understundom (enl. förf:s erfarenhet, om glycerin ej ingår i lösningen) de bekanta »svarta fläckarna». Orsaken till deras obetydliga reflexion — vilken föranlett deras namn — är säkerligen vätskehinnans ringa tjocklek (av storleken 10 $\mu\mu$).[2] Ser man vinkelrätt ned mot »fläckarna» äro de fullt genomskinliga.

Den största svårigheten vid försök rörande tunna vätskelameller är att finna en såplösning, som är tillräckligt seg. Dessutom bör en dylik lösning vara lätt att framställa och vid längre tids förvaring hållbar. Recept på lämpliga lösningar finnas i

[1] Om lamellen utsättes för direkt solsken, blir den mindre hållbar.
[2] Se C. V. Boys: Seifenblasen, Leipzig 1913, s. 120.

mängd.[1] Förf. har funnit följande av Antolik komponerade recept värt att rekommendera:

> 1 g venetiansk såpa (»sapo medicatus») löses i 20 g varmt destillerat vatten. När lösningen svalnat, tillsättes en med brunbränt (ej svart) socker mättad lösning (20 g dest. vatten + socker). Lösningarna blandas väl och få stå, tills alla genom omskakningen uppkomna gasblåsor gått bort, varefter det hela är färdigt för användning.

Lösningen är fort iordningställd, och den står sig minst några veckor. Den venetianska såpan torde erhållas i renaste form på apotek. Förf. har använt pulvriserad såpa, vilken är något dyrare än annan men i gengäld torde lämna bättre resultat. För övrigt gäller speciellt vid försök med såplameller, att allt som till försöken hör måste vara synnerligen väl rengjort.

Apparaten tillverkas och försäljes av Rudolph Grave A/B, Stockholm, till ett pris av kr. 5:— (exklusive rotationsapparat).

Lundsberg i januari 1934. *Ivar J:son Malmborg.*

## Om geometrisk sannolikhet.

När det är fråga om geometrisk sannolikhet, har man i regel att göra med oändligt många möjliga fall och oändligt många gynnsamma fall. Den vanliga definitionen på sannolikhet slår alltså slint. Man får då se sig om efter en annan definition.

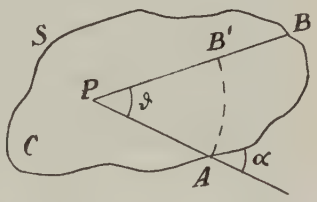
Om man sålunda vill ha ett mått på sannolikheten $S$ för att en godtyckligt vald punkt på en given yta av storleken $A$ skall befinna sig på en viss del $B$ av ytan, så säger »sunda förnuftet», att $S = \frac{B}{A}$, och därför ha somliga velat ta denna ekvation — och analoga för linjer, rymder och vinklar — som definition på sannolikhet. Men vanligen går man så till väga, att man betraktar $S$ som ett limesbegrepp och använder integraler i stället för summor. Man kan då använda samma betraktelsesätt vid kontinuerliga storheter som vid diskreta, så att man kan tala om »antal» punkter på en yta, innan man övergår till limes.

I det nyssnämnda problemet indelar man storheten $A$ i $n$ lika stora element $\delta\omega$, varav $m$ falla på $B$. Man räknar, att på varje element faller endast en punkt, $\therefore S = \frac{m}{n} = \frac{m \,.\, \delta\omega}{n \,.\, \delta\omega} = \frac{B}{A}$. Detta under

[1] Se bl. a. Boys' nyss citerade arbete vidare K. Rosenberg, Exp. buch, Bd I Leipzig-Wien 1929, s. 93 och H. Hahn, Freihandversuche II, Berlin 1916, s. 86 o. f.

förutsättning att alla element äro lika sannolika. Om däremot de olika elementen skola räknas med olika antal $cf$ gånger — där $c$ är en konstant och $f$ en ändlig funktion — och först då bli likvärdiga, när varje element betraktas som $cf$ skilda sådana, så blir $s$ approximativt $= \frac{\Sigma_{(B)} cf \cdot \delta\omega}{\Sigma_{(A)} cf \cdot \delta\omega}$, och i limes exakt $s = \frac{\int_{(B)} f d\omega}{\int_{(A)} f d\omega}$. Summorna $\Sigma_B cf$ och $\Sigma_A cf$ äro tagna över elementen i $B$ och $A$ resp. och beteckna *antalen* element $\delta\omega$, som böra jämföras. Integralerna däremot äro ändliga uttryck, som kunna representera dessa antal i limes.

Nu innebär sannolikheten ett subjektivt moment vid uppskattandet av vilka element som äro att anse som likvärdiga, d. v. s. om $\delta\omega$ skall beteckna 1:o en liten vinkel, 2:o ett linjeelement eller 3:o ett ytelement. Det gäller då att noggrant formulera problemet, så att det av formuleringen framgår vilketdera fallet som skall användas. Ty det visar sig, att de tre fallen kunna leda till olika resultat. Låtom oss nämligen beräkna i de tre fallen ett uttryck för antalet räta linjer, som man kan dra från en punkt $P$ till en båge $AB$ (se fig.).




*Första fallet.* Alla riktningar från $P$ äro likvärdiga. Antalet av alla strålar, som utgå från $P$ och utdragna nå fram till bågen $AB$, kan således representeras av *vinkeln* $\vartheta$, som är proportionell mot detta antal.

*Andra fallet.* Alla element av bågen $AB$ äro likvärdiga. Sammanbindes $P$ med punkterna på $AB$, så kan antalet sådana linjer representeras av längden av *bågen* $AB$.

*Tredje fallet.* Man sammanbinder $P$ med punkterna inuti ytan $PAB$ och drar ut linjerna, tills de råka $AB$. Mot varje punkt på ytan svarar ett ytelement, vadan antalet så dragna linjer representeras av *ytan* $PAB$.

Härav följer omedelbart, att man i allmänhet får tre olika värden på sannolikheten i följande problem:

*Problem.* Innanför en sluten kontur $S$ tages en punkt $P$ och på konturen två punkter $A$ och $B$. Sök sannolikheten för att en godtycklig stråle, som går från $P$ till konturen råkar bågen $AB$.

Svar 1:o) $\frac{\vartheta}{2\pi}$, $\vartheta = \angle APB$; 2:o) $\frac{AB}{S}$, $S$ = konturens längd; 3:o) $\frac{\text{ytan } PAB}{C}$, där $C$ är den av $S$ omslutna ytan. Om $AB$ är en cirkelbåge och $P$ en punkt på periferin, så sammanfalla mom.

1:o) och 2:o); om $AB$ är en cirkelbåge och $P$ är medelpunkten, sammanfalla alla tre momenten. Eljest blir det tre olika resultat.

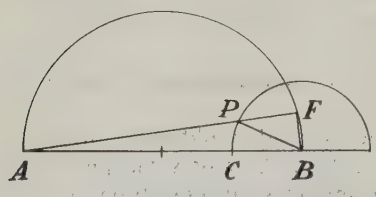
*Anm.* I tredje fallet förekommer varje stråle $PA$ ($= r$) så många gånger som det finns punkter (utom $P$) på densamma. Om $\angle\vartheta$ är mycket liten, så är approximativt ytan $PAB = \frac{1}{2} r^2\vartheta$ och alla strålarna lika stora. Det antal gånger varje stråle förekommer är då proportionellt mot $r$. *I tredje fallet representeras sålunda antalet olika strålar av bågen* $\frac{1}{2} r\vartheta = \frac{1}{2} AB'$.

Detta antal är alltså oberoende av vinkeln $\alpha$ mellan strålen $PA$ och bågelementet $AB$.

*Henrik Petrini.*

## Heiselers π-värde.

Ingenjör A. Heiseler, vars approximativa π-värde refererades i 1933 års juninummer av denna tidskrift, har haft vänligheten sända redaktionen ett särtryck [1], av vilket framgår, hur det egendomliga värdet påträffades. Herr H. har systematiskt sökt efter approximativa värden på en del storheter, bl. a. på π, vilka kunna konstrueras geometriskt medelst ett fåtal enkla operationer, så beskaffade att de kunna utföras med stor noggrannhet. Det var under dylikt metodiskt sökande, som det ifrågavarande värdet påträffades. Det skedde — framställt i något förändrad och åtskilligt förenklad form — på följande sätt.




På $AB = 4$ längdenheter ritas en halvcirkel och med $B$ som medelpunkt och $BC = 1$ som radie en annan halvcirkel. Från $A$ drages en linje, som skär cirklarne i $P$ och $F$. Då $P$ rör sig från $C$ uppåt på cirkeln, ökas $AP$ (till en början långsamt) från värdet $AC = 3$. Det bör finnas ett läge, för vilket $AP = \pi$. Sätt $PF = x$ och $BF = y$, så erhålles

$$y^2 = 1 - x^2 = 16 - (\pi + x)^2, \text{ varav } x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{15}{\pi} - \pi\right).$$

Numerisk beräkning ger $x^2 = 0{,}666718$, ett värde som endast med 5 enheter i femte decimalen skiljer sig från $0{,}666667$, d. v. s. $\frac{2}{3}$. Således gäller med mycket god approximation $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ och $y = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

[1] A. Heiseler, Herleitung und Konstruktion des eigentümlichen Näherungswertes etc. N:o 27, Jahrg. 1933, der Allgemeinen Vermessungs-Nachrichten. Verlag von R. Reiss in Liebenwerda.

Utgår man från dessa värden, erhålles ett approximativt π-värde —

$$= AP = AF - PF = \sqrt{16\frac{1}{3}} - \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}).$$

Numerisk beräkning ger $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3{,}1416174$, som skiljer sig från $\pi = 3{,}1415927$ med mindre än 0,001 %, en högst aktningsvärd noggrannhet. Lägger man därtill den egendomliga sifferföljden — densamma som i $\pi = 3{,}1416$ —, så kan man med skäl beteckna Heiselers π-värde som ett verkligt intressant och roande matematiskt kuriosum.

Då $BF = \sqrt{\frac{1}{3}}$ lätt konstrueras geometriskt, så kan ju $AP = \pi$ erhållas på geometrisk väg medelst ett fåtal enkla konstruktioner. Heiseler diskuterar flera konstruktionsmöjligheter.

*C. E. Blom.*

## Återigen π.

T. Edqvist's påpekande av A. Heiseler's kuriösa närmevärde för π i junih. 1933 av denna tidskrift ger osökt anledning att erinra om G. Cesàro's ekvation i Liègeakademiens »Mémoires» t. *17* (1932), vilken som rot ger π med bättre approximation än Metii tal $\left(\frac{355}{113}\right)$, trots det dess koefficienter äro hela tal och med undantag av en enda äro lika med enheten. Ekvationen är

$$f(x) = x^6 + x^5 - x^4 = 1170. \qquad (1)$$

Undersökes funktionskurvan $y = f(x)$, finner man, att den för mycket stora $x$-värden närmar sig till en sjättegradsparabel, går dessförinnan genom punkterna (1; 1) och (−1; −1) och passerar $x$-axeln i punkterna 0, $+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ och $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Innanför dessa senare punkter är $y$ alltid negativ, utanför alltid positiv och växande. Ekvationen $f(x) = 1170$ har därför endast två reella rötter, den ena nära $-3{,}5$, den andra, som intresserar oss, nära $+\pi$. För att utröna *hur* nära, sätt $x = A + \xi$, där $A$ är ett gott närmevärde och $\xi$ en liten korrektion, som vi genom insättning i ekvationen finna ur

$$\xi + \frac{15A^2 + 10A - 6}{A(6A^2 + 5A - 4)}\xi^2 + \frac{20A^2 + 10A - 4}{A^2(6A^2 + 5A - 4)}\xi^3 + \ldots =$$

$$= \frac{1170 - A^4(A^2 + A - 1)}{A^3(6A^2 + 5A - 4)}.$$

Med närmevärdet $A = \frac{355}{113}$ (Metii tal) och $\xi = \zeta \cdot 10^{-6}$ fås

$$\zeta + \frac{250\,284\,943}{321\,505\,395} \cdot 10^{-6} \cdot \zeta^2 + \frac{36\,654\,359\,406}{114\,134\,415\,225} \cdot 10^{-12} \cdot \zeta^3 + \ldots =$$

$$= -\frac{6\,228\,834\,760\,000}{36\,628\,016\,534\,007},$$

eller i decimalbråksform

$$\zeta + 0{,}778\,478\,205\,630\ \zeta^2 \cdot 10^{-6} + 0{,}321\,151\ \zeta^3 \cdot 10^{-12} =$$

$$= -0{,}170\,056\,567\,333\,284. \qquad (2)$$

Angivna med 12 decimaler äro Metii tal och $\pi$:

$$\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,920\,354$$

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,590.$$

Metii tal är således $2{,}67 \cdot 10^{-7}$ större än $\pi$. Vår korrektion $\zeta = -0{,}170$, d. v. s. $\xi = -1{,}7 \cdot 10^{-7}$, visar, att ifrågavarande rot till Cesàros ekvation endast är $0{,}97 \cdot 10^{-7}$ större än $\pi$ eller ej fullt *en* enhet i *sjunde* decimalen. Den representerar alltså $\pi$ med nära 3 ggr. mindre fel än Metii tal.

Ur (2) få vi noggrannare

$$\zeta = -0{,}170\,056\,567\,333\,284$$
$$- \qquad 22\,513\,001$$
$$+ \qquad 2,$$

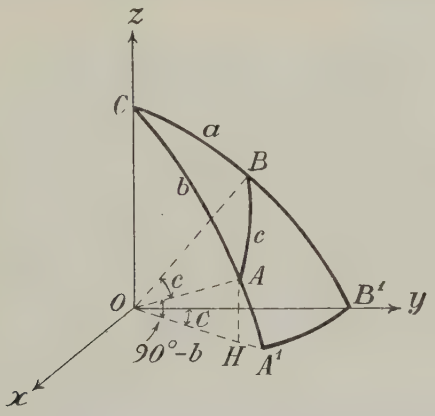
och följaktligen roten med 20 säkra decimaler. Ökas vid insättning i (1) den 21:a decimalen med en enhet, så åstadkommes högra ledet, 1170, korrekt med 18 decimaler.

Till ovanstående må fogas följande. Numeriskt räknearbete är en lugnande sysselsättning, blott man undviker räknemaskiner. Med Crelle's »Rechentafeln», som innehåller alla produkter av tresiffriga tal, utföras mångställiga multiplikationer och divisioner — såsom t. ex. de ovanstående — med förvånande lätthet och säkerhet. Som exempel må nämnas, att ANDOYER högst egenhändigt beräknat alla sina »Tables trigonométriques fondamentales» med Crelle's tabeller, utan något mekaniskt hjälpmedel. Talen uppdelas i grupper om tre siffror, och multiplikationen av dessa utföres, *naturligtvis från vänster till höger,* lika lätt som med den traditionella enställiga multiplikationstabellen. Varför inläres för övrigt icke denna ordningsföljd av delmultiplikationerna, varigenom de ofta betydelselösa slutsiffrorna undvikas, redan vid den elementära undervisningen i aritmetik?

*B. Rolf.*

## Cosinussatsen i sfäriska trigonometrien.

Följande bevis för cosinussatsen i sfäriska trigonometrien torde vara lätt att minnas. Det företer nämligen en viss likhet med härledningen av formeln för cos $(\alpha - \beta)$, (se Hedström-Rendahls lärobok i trigonometri) och stöder sig endast på formeln för avståndet mellan två punkter i rymden. Hörnens koordinater i en sfärisk




triangel $ABC$ antages vara för $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ för $B\,(0;\ y_2;\ z_2)$ och för $C\,(0;\ 0;\ 1)$.[1] Två uttryck erhållas för $\overline{AB}^2$, det ena enligt consinusteoremet och det andra enligt avståndsformeln. Alltså fås

$$2 - 2\cos c = x_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

men $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = y_2^2 + z_2^2 = 1$, varav

$$\cos c = y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Insättas $y_1 = \sin b \cos C$ ; $y_2 = \sin a$, $z_1 = \cos b$, $z_2 = \cos a$, erhålles

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

[1] Figuren är hämtad ur S. Nydell, Sfäriska trigonometriens grundformler, denna tidskr. årg. 16, sid. 222.

*S. Bågman.*

## Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Föreningen har under de senaste månaderna gått kraftigt framåt i medlemsantal. Så gott som alla lärare i matematik, fysik och kemi vid de högre läroverken och de större realskolorna tillhöra föreningen liksom lärare vid högre privata skolor. Men även vid seminarier och tekniska skolor har föreningen ett stort antal medlemmar. Såväl studenter som deras akademiska lärare ha ävenledes i stor utsträckning anslutit sig. Enstaka, utanför undervisningsväsendet stående medlemmar äro också att tacksamt anteckna, men särskilt här borde ytterligare anslutning vara att förvänta. Medlemsantalet är ($^{15}/_{3}$) nära 600 men ökas så gott som dagligen.

Föreningens styrelse har sedan konstituerandet haft tre sammanträden, allesammans ägnade åt utredningen av den senaste läroverksreformens menliga verkningar för de matematiskt-naturvetenskapliga ämnena. På nyåret 1934 sammanfattades och publicerades dessa utredningar i en broschyr »Den senaste läroverksreformen. Följderna för den matematiska och den matematisk-naturvetenskapliga undervisningen». Broschyren har rönt livlig efterfrågan; enbart genom direkt rekvisition hos sekreteraren ha 400 ex. försålts. Den är nu tillgänglig i bokhandeln, C. E. Fritzes förlag, Stockholm, 66 sid., pris 1 kr.

Kapitelrubrikerna må ge upplysning om dess innehåll: Matematikens ställning i de svenska läroverken under olika tidsskeden, Matematikundervisningens omfattning i olika länder, Arbetsskoleprincipens tillämpning i de svenska läroverken, Har 1933 års stadga förbättrat de främmande levande språkens ställning på reallinjen? Val av ämnen i det differentierade gymnasiet, Kompletteringarna i studentexamen och deras ökning under senare tid, Följderna för universitet och högskolor av matematikens stympning i läroverken, Matematiken i realskolan, Följderna för vissa läroanstalter av matematikens stympning i realskolan.

Såsom torde vara bekant ligger broschyren till grund för en vid årets riksdag väckt motion.

Sedan broschyren befordrats till trycket, har frågan om läroverkens matematikundervisning kommit i delvis nytt läge genom Skolöverstyrelsens yttrande ($^{5}/_{2}$ 1934) över Tekniska högskolans framställning till K. M:t om grundligare matematikundervisning i läroverken för de elever, som ämna sig över till Tekniska högskolan. Skolöverstyrelsen föreslår nämligen som en provisorisk åtgärd en tilläggskurs i matematik under sista gymnasieåret för

dem, som önska sådan. Föreningens arbetsutskott har publicerat en kritik av detta förslag med bestämt avstyrkande av den tilltänkta åtgärden även som ett provisorium. Bristerna i 1933 års stadga kunna icke avhjälpas genom en sådan åtgärd, som f. ö. innebär flera pedagogiska svagheter och därtill tekniska svårigheter, som göra tilläggskursen ineffektiv och så gott som orealiserbar.

Korta meddelanden om Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning komma i fortsättningen att regelbundet inflyta i denna tidskrift. Början gjordes i decembernumret 1933, sid. 226. — Anmälan om inträde i föreningen sker enklast i samband med inbetalning av medlemsavgiften (2 kr.) å föreningens postgirokonto n:r 85 825, lektor C. Lönnqvist, Södertälje.

*Conrad Lönnqvist.*

# Bokanmälningar.

Helmer Hellgren, *Grafostatik.* P. A. Norstedt & Söners förlag (Svenska bokförlaget), 1933. 186 sid. med 228 fig. och 105 övningsexempel. Pris kart. kr. 8:25.

Med föreliggande lärobok av lektorn vid tekniska elementarskolan i Norrköping Helmer Hellgren har ett av de många kännbara behoven av lämplig undervisningslitteratur på svenska språket för de tekniska läroverken fyllts, och med nöje kan man också konstatera, att behovet fyllts på ett synnerligen tillfredsställande sätt.

Klart och redigt redogör förf. för de inom byggnads- och maskintekniken vanligast förekommande grafiska konstruktionsmetoderna. Talrika utmärkta figurer belysa framställningen, och varje kapitel avslutas med väl valda övningsexempel.

Läroboken är icke endast avsedd som en hjälpreda för undervisningen vid de tekniska läroverken. Framställningen är genomgående så utförlig, att boken även kan rekommenderas åt dem, som med nödiga kunskaper i allmän mekanik på egen hand vilja inträngа i hithörande spörsmål. Förf. avser också, att den skall kunna användas som uppslagsbok, och han har därför efter de mera omständiga konstruktionsmetoderna infört särskilda konstruktionsschemata, som den praktiskt arbetande teknikern lätt kan återfinna i innehållsförteckningen. På grund av detta tredubbla syfte har boken fått en för en lärobok väl stor tyngd. Men detta är också det enda man kan erinra mot densamma — ur ren skolsynpunkt.

*Martin Lien.*

*Kosmos.* Fysiska uppsatser. Bd 11. Utgivna av Svenska Fysikersamfundet. P. A. Norstedt & Söner (i distribution), Stockholm 1934, 256 sid. I bokhandeln häft. kr. 10. Medlemskap, årsavg. kr. 10, medför rätt till ett bundet ex. Anmälan till prof. G. Borelius, Tekniska Högskolan, Stockholm.

Första textsidan i Fysikersamfundets årsbok Kosmos 1933 prydes av Heisenbergs, Schröders och Diracs porträtt, de senast korade nobelpristagarna i fysik. Därunder följer en uppsats av prof. C. W. Oseen om den nya atomfysiken. Den inledes med följande ord som väl karakterisera ämnets svårtillgänglighet: de arbeten av W. Heisenberg, E. Schrödinger och P. A. Dirac, varigenom de lagt grunden till det, som nu kallas kvantmekanik, vågmekanik eller ny atomfysik, ha en så starkt matematisk prägel, att ett referat av dem icke är möjligt. Under de sist förflutna åren har ett omfattande arbete nedlagts på försöket att utbilda ett begrepps- och föreställningssystem, som ger uttryck åt och alltså kan sägas ligga till grund för de lagar, som man funnit giltiga inom atomfysiken. Utan att ingå närmare på de matematiska grundtankarna ger Oseen en intressant skildring av de nya ideernas utveckling, varvid några av de punkter särskilt belysas, i vilka gammal och ny åskådning bryter sig mot varandra.

Under åren 1928—1932 har lektor T. E. Aurén med fotocell utfört kontinuerliga mätningar av den totala instrålningen från sol och himmel vid Stocksund, strax norr om Stockholm. Materialet har ur olika synpunkter bearbetats. Förf. har beräknat instrålade ljusmängden per månad och år, fördelningen av antalet observationsdagar på olika belysningsgrupper, relativa belysningen per mån. och år, d. v. s. förhållandet mellan rådande belysningen och den som skulle inträffa, om himmelen varit klar. Även vid fullständigt mulen himmel är den relativa belysningen 21%. Till sist ges en översikt av ljusfördelningen på Skandinaviska halvön under olika årstider och en mycket intressant framställning av belysningens inflytande på barrträdens tillväxt.

Den fysiker, som gärna vill följa med sin vetenskaps viktigare praktiska tillämpningar, är dr. H. Bäckström verkligt tacksam för det klara och insiktfulla sätt, varpå han redogör för de nu använda metoderna för ljudets registrering och reproduktion vid tonfilm. De fysikaliska principerna för metoderna skjutas i förgrunden, så att läsaren ej behöver förlora överblicken över metodernas tekniska utformning. Det är överraskande att finna, hur tekniken har att hämta de nödiga hjälpmedlen från de mest skilda delar av den fysiska vetenskapens rustkammare: fotoeffekt, Kerreffekt, förstärkarrör, Brauns rör, stränggalvanometer etc.

Dr. G. Siljeholm bidrager med en längre uppsats över glödelektrisk emission från rena metallytor. Han lämnar en mycket god orientering över undersökningsmetoderna samt de viktigaste experimentella fakta såväl beträffande den negativa som den betydligt mindre kända positiva glödemissionen från rena metallytor. Ämnet är som bekant av stor betydelse för radiotekniken.

Länge motstodo röntgenstrålarna forskarens bemödanden att för dem påvisa böjnings- och interferensfenomen. Max Laue lyckades som bekant uppvisa denna strålnings vågnatur genom böjning och interferens i kristallgitter, men först 1925 uppdagades möjligheten att använda vanliga optiska gitter för bestämning av röntgenvåglängder (se Kosmos Bd 7 o. 8). Ur pedagogisk synpunkt av stort intresse är doc. G. Kellströms redogörelse för de av honom i Upsala utförda böjnings- och interferensförsöken. Han har nämligen lyckats att på röntgenområdet utföra alla de klassiska optiska böjningsförsöken: böjningen vid en kant, vid en spalt (yttre och inre fransar), smal skärm samt interferensförsöken med Fresnels dubbelspegel och Loyds spegelförsök. Förträffliga bilder, som vid lektion kunna visas med episkop, äro i texten infogade.

Medelst högspända elektriska urladdningar kunna elektroner bortsprängas från atomen. Då atomresten sedan infångar och binder elektroner i stället för de bortsprängda, sker detta under emission av ljus. Fil. lic. B. Edlén har lyckats avkläda syreatomen alla dess åtta elektroner. När sedan den första elektronen infångas, emitteras ett väteliknande spektrum, när den andra, tredje o. s. v. därefter infångas, emitteras andra spektra. Edlén har fått fram samtliga de typer av spektra, som återfinnas hos de element, som äro lättare än syre. Genom analysen av dessa spektra kan man i detalj fastställa huvuddragen av atomernas elektronbyggnad. Edlén anser att det ej ligger helt utom möjligheternas gräns att redan med de nuvarande spektroskopiska hjälpmedlen åtminstone i stora drag klarlägga de 4278 olika spektra, som kunna uppstå vid de 92 kända elementens elektronbindningsprocesser.

Professor H. Norinder, som sedan länge sysslat med högspänningsundersökningar, beskriver en del katodstråleoscillografer och deras användning för undersökning av blixturladdningar och överspänningsfenomen på kraftledningar.

De enligt min mening intressantaste uppsatserna äro doc. G. Isings, avhandlande högspänningsmetoder för atomsprängning och prof. E. Huithens om den tunga väteisotopen.

Ising behandlar först de direkta högspänningsmetoderna, vid

vilka en mycket hög spänning direkt lägges mellan elektroderna i ett vakuumrör. Därefter kommer han till metoderna med multipel acceleration av de söndersprängda partiklarna, som tvingas att upprepade gånger (ända till 150) passera ett accelererande fält. Man kan med dessa sista metoder få en strålning, som såväl ifråga om partiklarnas art som deras hastighet är nästan fullständigt homogen.

Under det de hastigaste α-partiklarna från radiumfamiljen äga en energi av 7,7 millioner elektronvolt, kan man nu med konst framställa 10-millionervoltsstrålar av protoner med en strömstyrka, som motsvarar α-partikelströmmen från 1,8 ton radium! Man har med multipel acceleration uppnått 25 millionervolts protonhastighet! Med dessa häpnadsväckande experimentella hjälpmedel har man också nått glänsande resultat på atomkärnesprängningens område, vilka raskt fört forskningen vidare på de banor, som genom 1932 års stora upptäckter öppnades för forskningen. Det året upptäcktes som bekant neutronen, en tung väteisotop (atomvikten ungef. 2), och positiva elektronen, positronen.

Professor Hulthén skildrar i sin uppsats upptäckten av den tunga väteisotopen (»deuterium») och ansluter härtill en redogörelse för de framgångsrika försöken att bestämma dennas massa, blandningsförhållandet mellan tungt och lätt väte och det tunga vätets framställning i ren form. Det tunga vätet har atomvikten 2,0137. Tungt vatten fryser vid + 3°,8, kokpunkten ligger vid 101°,42. Dess största täthet ligger vid 11°,6, och specifika vikten är 1,1053. Vanligt vatten innehåller en tung vattenmolekyl på 5000 lätta molekyler. Då man nu vet, att syre utgöres av 3 isotoper och vätet av två, finnas alltså 12 olika slags vattenmolekyler! Och organiska kemiens redan förut väldiga antal föreningar blir med ens mångdubblat.

Den fysiska forskningen går framåt med väldiga steg, och vid läroverken minskas antalet undervisningstimmar i detta ämne.

*M. Sjöström.*

Rendahl-Wahlström-Frank, *Räknebok för realskolan.* Andra delen, 91 sid. kr. 1:80, facit 25 öre. Tredje delen, 63 sid. kr. 1:40 med facit. Sv. Bokförlaget.

Första delen av denna lärobok hade undertecknad nöjet att anmäla i denna tidskrift år 1930. Då andra delen utkom (1931), beslöt jag tydligen att vänta på den tredje, men när jag nu på nytt går igenom del två, är det under delvis andra förutsättningar

än vad då hade varit fallet. Och jag tänker: En förträfflig bok och en i det stora hela förträfflig lärokurs, som nu är starkt beskuren. Till nästa upplaga får väl även läroboken beskäras, om inte den pedagogiska vinden hunnit kantra till dess. Annars går nog boken bra att använda även som den är nu; läraren torde lätt nog kunna verkställa nödiga uteslutningar.

Så vitt jag kan se, är det en mycket trevlig bok med bra exempel av lämplig svårighetsgrad — att de numera kanske äro för många även på kapitel, som fått stå kvar i kursen, behöver inte vara något fel. Texten vid nya kapitels början tycks mig vara lagom och bra.

Man känner en blandning av vemod och förargelse, när man tänker på, att bokstavsräkningen nu skall bort ur realskolans kurs. När nu antalet timmar för matematiken blivit så starkt beskuret, varför då inte ta bort en del av de så kallade »praktiska» problemen, som i många fall äro så föga givande, och låta bokstavsräkningen stå kvar? Den roar faktiskt eleverna, den är lätt och den kan man lära sig, och för dem som fortsätta i gymnasiet är den delen av kursen till den största nyttan. De nya kurserna på realskolan tycks mig vara att göra det värsta av en dålig situation. Undertecknad skulle bli glad, om författarna till denna lärobok ville låta kapitlet om bokstavsräkning stå kvar i nästa upplaga. Det finns dock elever, som gärna skulle vilja ge sig in på dessa områden på egen hand, elever med större intresse för matematik än själva ecklesiastikministern.

Del tre, för avslutningsklassen, är avpassad efter hittills sista stadgan. Måhända finns en och annan avvikelse. Med glädje ser jag t. ex. att förf. medtagit förenkling av uttryck av typen $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, ehuru detta, löjligt nog, inte längre skall få läras ut. Även denna del vill jag varmt rekommendera. Bra exempel, bra förklaringar. Och de små anvisningarna om hur man ritar stereometriska figurer komma säkert att visa sig nyttiga.

Måhända kan det synas som om jag illa löst kritikerns uppgift som felfinnare, men dels är en matematikers kritiklusta i dessa dagar riktad åt annat håll, dels har jag verkligen inte funnit något väsentligt att anmärka på.

*Bengt E. Nyström.*

*Praktische Schulphysik*, Monatsschrift für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verlag: Physikalische Werkstätten, Göttingen. Per år (12 häften à 20 till 25 sid.) RM. 3: 80.

Denna månatliga publikation från Physikalische Werkstätten i Göttingen har utvecklat sig till en värdefull tidskrift, rik på pedagogiska uppslag och instruktiva apparat- och försöksbeskrivningar. I den nu avslutade trettonde årg. (1933) finner man en hel rad läsvärda uppsatser, till övervägande antal på elektricitetslärans område (särskilt om växelström) men även ett stort antal behandlande dynamiska och optiska problem m. m. Att innehållet ofta rör sådant som tillverkas vid firmans fabriker är naturligt och ingalunda klandervärt, ty fabriken gör numera många mycket bra saker, som förtjäna att bli kända, och de presenteras för övrigt oftast på ett sätt och i en form, som åt uppsatserna i och för sig ge ett fysikaliskt-pedagogiskt värde.

Illustrationerna äro många och i regel goda. En mycket liten och tät stilsort användes, vilket gör att sidorna rymma en mycken-het text. Varje häfte blir därför trots ett ringa sidantal mycket innehållsrikt. Men läsningen tröttar ögat, det torde ej kunna förnekas.

I förhållande till sitt innehåll och till nuvarande priser på tyska bokmarknaden är tidskriften billig.

*C. E. Blom.*

E. Roller und H. Pricks, Schulversuche zur Elektrizitätslehre. Bd II Wechselstrom, 132 sid., RM. 4: 20. Bd III Schwingungen, zweite Aufl., 116 sid., RM. 4: 20. Phywe-Verlag, Göttingen 1933 och 1932.

Åtskilliga av denna tidskrifts läsare ha säkerligen redan stiftat bekantskap med dessa förff. genom det mindre arbete med samma titel, som efter framträdandet 1929 upplevt både en andra och en tredje upplaga. Då ytterligare en behövdes, uppdelades stoffet i en del omfattande växelström — del II som nu utkommit och som enbart den är avsevärt större än den ursprungliga boken — och en del I omfattande likströmsförsök, vilken är under förberedelse. Till denna har fogats en tredje del över elektriska svängningar; andra uppl. 1932.

Tillsammans utgöra dessa böcker en mycket värdefull handledning för var och en, som på experimentell väg vill inträngа i dessa kapitel. Försöksbeskrivningarna äro mycket klart utformade och vittna om stor pedagogisk klokhet och erfarenhet. Efter varje

försök göres en sammanfattning av vad försöket visat. Vid omarbetningen har i del II dimensionsuppgifter angående material och apparater bifogats, vilket högst väsentligt underlättar arbetet. Genom att lämna alla vänstersidor fria från text har man berett plats för anteckningar, en mycket praktisk anordning. — Vid ett stort antal försök är det Phywe-firmans apparater, som komma till användning, men man kan naturligtvis även använda annan materiell, och åtskilligt kan den tilltagsne göra själv efter de anvisningar som lämnas.

Dessa böcker lämpa sig både för läraren och för den studerande. Det är mycket, som här kan utlämnas till eleven som enskilt arbete. Att böckerna åsatts så högt pris, är ett icke oväsentligt hinder för deras spridning och måste ur denna synpunkt beklagas. Det borde ligga i firmans eget intresse att hålla priset i underkant och ej tvärtom.

*Physikalische Versuche* für Schule und Haus, Göttingen 1933. Detta lilla häfte är författat av E. Roller och utgöres av beskrivningar på en rad enkla växelströmsförsök, vilka kunna utföras med en samling apparatdelar, som Phywe sammanfört i »en experimentlåda» (se R. Graves annons i detta nummer). Vid första anblicken av denna får man det intrycket att det rör sig om nätta leksaker, föga lämpade för allvarliga fysikaliska försök. En eftermiddags experiment övertygade anmälaren, att så ej är fallet. Med den lilla miniatyrmagneten med lamellerad kärna och lösa spolar utför man hela raden induktionsförsök, transformerar i båda riktningarna (en tråd kan smältas och vatten bringas till kokning i en skålformig kopparring); Thomsons repulsionsförsök går oklanderligt. Magneten kan även apteras som växelströmsgenerator, och med denna jämte en liten magnet kan man demonstrera synkronmotorns verkningssätt, m. m. Några alltför primitiva detaljer fingo visserligen justeras, men för övrigt fungerade allt bra. Priset i Tyskland, RM. 33:—, är billigt, priset 52 svenska kronor (hos R. Grave) får man ej heller klaga över. Även separata delar kunna anskaffas. Några pojkar, som fingo utföra en del av försöken under en laborationstimme, senterade den lilla experimentlådan i hög grad. Vid dessa försök användes som strömkälla en Siemens telefoninduktor, som visade sig passa mycket bra till de små spolarna. Anmälaren får kanske tillfälle beskriva några av dessa försök i ett kommande nummer av tidskriften.

*C. E. Blom.*

## Tidskrifter.

**Svensk kemisk tidskrift.** Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLV, 1933. N:r 12 (dec.): Biografier över avlidna medlemmar (bl. a. Å. G. Ekstrand, A. Hamberg, H. G. Söderbaum). — Årg. XLVI, 1934. N:r 1 (jan.): A. Holmqvist, Antimonelektroden. — A. Fredga, Eine neue Methode zur Isolierung von optisch aktiver Thio-di-laktylsäure. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

**Industritidningen Norden.** Årg. 1933, h. 50—52, årg. 1934, h. 1—9.

Ur innehållet. Elektrovärmeinstitutet. — Elektrisk oxidering av aluminium. — Boliden och dess arsenikproduktion. — Aktuella maskiner och verktyg. — Landsbygdshushållens vattenförsörjning. — Nyströms långtidsgrammofon. — Automatiska vågar. — Bladaluminium och dess användning. — Med varje nummer följer »Svensk tidskr. för industriellt rättsskydd» innehållande illustrerade patentbeskrivningar.

**Era,** Elektricitetens rationella användning. Årg. 1933, h. 12, 1934, h. 1—2.

Ur innehållet. Elektrifierade storkök. — Elektrosvetsning. — »Glesum», nytt system för kommutering av växelström. — Åtorps kraftverk. — Elektrovärme vid Sandvikens järnverk. — Från en studieresa i Holland. — Notiser om nya apparater och publikationer.

**Tidskrift för Ljuskultur.** Utg. av Föreningen för ljuskultur, Regeringsg. 11 B, Stockholm. Årg. 1934, h. 1; pr år (4 häft.) kr. 5: —.

Ur innehållet. De elekriska glödlamporna och deras egenskaper. — Tekniska Högskolans fotometerlaboratorium. — Från Chicagoutställningen. — Om glas, armatur, neonrör m. m.

**Matematisk Tidsskrift,** København 1933, h. 4.

Ur innehållet i avd. **A.** E. Holm, Skæring mellem Tetraederkanters korteste Afstande. — F. V. Thiesen, En Bemærkning om den stereografiske Projektion. — Eksamensopgaver. — Avd. **B.** C. Juel, Diakaustika og Katakaustika. — B. Jessen, Elementare Beweise einiger Sätze über stetige Abbildungen einer Kugel auf sich. — H. Bohr, Endnu engang Kroneckers Sætning. — Litteraturanmeldelser.

**Norsk Matematisk Tidsskrift,** Oslo 1933, h. 4.

Ur innehållet. Finn Alexander, Interpolation med to variabler. — Bokanmeldelser, eksamensopgaver, opgaver til løsning.

(Forts. sid. 64).

# Problemavdelning.[1]

## Matematiska uppgifter.

654) *Lös ekvationen*

$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x = -2.$$

*S. B.*

655) *Tre av rötterna till ekvationen*

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

*äro* $x_1$, $x_2$ *och* $x_3$. *Beräkna* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

*X.*

656) *Ett kärl med given inre volym skall ha samma konstruktion som en tändsticksask. Alla väggar skola ha samma givna tjocklek. Hur bör kärlet dimensioneras för att väggarnas sammanlagda volym må bli den minsta möjliga?* *X.*

## Enklare matematiska uppgifter.[2]

657) Om $a$ är kanten i en kub, så är ju $a\sqrt[3]{2}$ kanten i en dubbelt så stor kub. Att medelst passare och linjal konstruera denna (»kubens fördubbling») är ett av de olösliga, klassiska problem på vilka så mycken tankekraft förspillts. Många konstruktioner, ledande till approximativa värden, ha under tidernas lopp föreslagits. Visa, att $5a : (\sqrt{5} + \sqrt{3})$ är ett mycket gott närmevärde på $a\sqrt[3]{2}$ (felet endast c:a 0,01%), och angiv hur detta uttryck konstrueras.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. nr. 657 är insänd av Hj. Kreüger, nr. 658 av V. Dorph, nr. 659 av C. H., nr. 666 av C. E. B., nr. 660, 665, 667 av X., nr. 661—664, 668—671 av S. B.

Rättelse: Svaret till uppg. 519 a, årg. *15*, sid. 120 bör kompletteras med lösningen: $A = 45°$, $B = 98°{,}13$ och $C = 36°{,}87$. I svaret till uppg. 649, årg. *16*, sid. 241 bör såsom tredje värde upptagas $\sqrt{27}$ cm. Red. är mycket tacksam för påpekanden angående felaktiga eller ofullständiga svar.

658) En regelbunden 8-hörning och en liksidig triangel äro inskrivna i samma cirkel och ha ett hörn gemensamt. Den del av motstående triangelsida, som ligger inom 8-hörningen, har då approximativt samma längd som cirkelkvadranten. Hur många procent av kvadrantens exakta längd utgör felet?

Svar: 0,955%.

659) Lös följande ekvation, i vilken $a$ och $b$ äro positiva tal:

$$\sqrt{a(x-1)}+\sqrt{b(x-2)}=\sqrt{a(3-x)}.$$

Svar: $x=2$.

660) För vilka värden på $z$ kunna ekvationerna $x+y=1$, $x^7+y^7=1$ och $x^3+y^3=z$ gälla samtidigt?

Svar: För $z$-värdena 1 och $-2$.

661) Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} xy+x+y&=5\\ xz+x+z&=7\\ yz+y+z&=11 \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $x$, $y$, $z$ äro resp. 1, 2, 3 eller $-3$, $-4$, $-5$.

662) Rötterna till ekvationen $x^2-7x+1=0$ betecknas med $x_1$ och $x_2$. Beräkna utan att lösa ekvationen $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ och $\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$.

Svar: 3 och $\sqrt{5}$.

663) Visa, att $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\cot^2\alpha}-\dfrac{\cot\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\cot\alpha$.

664) I fyrhörningen $ABCD$ är $AB=5$ cm, $BC=3$ cm, $CD=2$ cm och $DA=7$ cm. Vinklarna $B$ och $C$ äro lika stora. Beräkna ytan.

Svar: $\dfrac{31\sqrt{3}}{4}=13{,}42$ cm$^2$.

665) I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 1 cm kortare än den ena kateten och 4 cm kortare än den andra. Beräkna höjden.

Svar: $\sqrt{5}+\sqrt{3+\sqrt{20}}=4{,}970$ cm.

666) I en likbent triangel är basen $a$. Bissektrisen till en av basvinklarna delar motstående sida i två delar, av vilka den närmast basen belägna är $x$. Vilka värden kan $x$ antaga?

Svar: $a>x>\dfrac{a}{3}$.

667) På ett bord ligga $n$ stycken kongruenta koner på mantelytorna med spetsarna i samma punkt och utfylla då precis ett varv. Beräkna toppvinkeln.

Svar: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi}{n}$, om $\alpha$ är toppvinkeln.

668) Diskutera kurvan

$$8y = (x^2 - 4)^3\,(x^2 - 1).$$

669) Bestäm ekvationen för en cirkel, som i punkten (3; 3) tangerar linjen $y = x$ och av $x$-axeln avskär en korda, vars längd är $2\sqrt{7}$.

Svar: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 8$ och $(x+5)^2 + (y-11)^2 = 128$.

670) En ellips och en cirkel ha samma medelpunkt och skära varandra under 30°. Parametrarna äro gemensamma kordor. Visa, att ellipsens excentricitet är $= 1 : \sqrt[6]{3}$.

671) Linjen $3x - 2y - 4$ är normal till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, vars excentricitet är $\sqrt{6} : 3$. Angiv ellipsens ekvation.

Svar: $x^2 + 3y^2 = 7$ eller $9x^2 + 3y^2 = 31$.

## Lösningar till uppg. 618—620.

618) *Tre positiva tal ha det aritmetiska mediet a; deras harmoniska medium är h. För vilka sådana tal blir det geometriska mediet maximum eller minimum?* *S. Wigert.*

Om talen äro $x$, $y$ och $z$ samt deras geometriska medium $\sqrt[3]{u}$, fås systemet

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 3a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{3}{h} \\ xyz &= u \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\ldots\ldots (1) \\ &\ldots\ldots (2) \\ &\ldots\ldots (3). \end{aligned}$$

Enligt en känd sats är $u \leqq a^3$ och $\frac{1}{u} \leqq \frac{1}{h^3}$, varav följer $h \leqq a$ som villkor för pos. lösn. För $a = h$ fås endast $x = y = z = a$ och $u = a^3$. Vi antaga alltså $0 < h < a$. Vidare måste $x$, $y$ och $z$ ligga mellan $\frac{h}{3}$ och $3a$. Av (2) och (3) fås $xy + xz + yz = \frac{3u}{h}$. De tre talen bli alltså rötter till ekv.

$$t^3 - 3at^2 + \frac{3u}{h} \cdot t - u = 0,$$

som löst med avs. på $u$ ger

$$u = \frac{ht^2(t-3a)}{h-3t}, \text{ varav } u' = -3ht \cdot \frac{2t^2-(3a+h)t+2ah}{(h-3t)^2}.$$

Funktionskurvan befinnes ha ett max. $M$ och ett min. $m$. Enär $x$, $y$ och $z$ representeras av $t$-koordinaterna för skärningspunkterna mellan kurvan och en med $t$-axeln parallell linje, måste $m \leqq u \leqq M$. Av derivatan fås omedelbart, att $u$ antar sitt maximivärde för $x_1 = y_1 = \frac{3a+h+\sqrt{(a-h)(9a-h)}}{4}$ och $z_1 = 3a-(x_1+y_1)$ och sitt minimivärde för $x_2 = y_2 = \frac{3a+h-\sqrt{(a-h)(9a-h)}}{4}$ och $z_2 = 3a-(x_2+y_2)$; $z_1$ är det *minsta* och $z_2$ det *största* tal, som kan förekomma i ett system pos. tal, vilka satisfiera (1) och (2).

*X.*

619) *En cirkel med centrum O och en punkt P äro givna. Att i cirkeln inskriva en likbent triangel, i vilken en av de lika sidorna är vinkelrät mot PO, medan den andra går genom P.* *X.*

Uppgiften tänkes löst. Den sökta triangeln är $ABC$, där $AB = AC$ (och $P$ belägen på $AC$). Upprita den cirkel med centrum i $P$, som går genom $O$. $AO$ skär denna cirkel i $A_1$. Då är $\angle APA_1 = 90^\circ$ och (om $M$ är mittpunkten på $A_1O$) $\overline{PA_1}^2 = \overline{PO}^2 = AA_1 \cdot MA_1$ eller $2\overline{PO}^2 = AA_1 \cdot OA_1$. Uppgiften är alltså återförd på standardproblemet att konstruera två sträckor $AA_1$ och $OA_1$ med känd skillnad (= cirkelns radie) och känd produkt (= $2\overline{PO}^2$). Den likbenta triangeln $OPA_1$ kan sålunda uppritas, varvid två lösningar erhållas, allteftersom basen tages lika med den mindre eller den större av de konstruerade sträckorna. I senare fallet måste $P$ ligga utanför den givna cirkeln. *X.*

620) *Från en given punkt dragas tangenterna till en given cirkel. En variabel tangent bildar med de förstnämnda tangenterna en triangel. Sök orten för medelpunkten till den omskrivna cirkeln.* *X.*

Den givna punkten är $A$, cirkelns medelpunkt $M$ och radie $r$. Drag mittpunktsnormalen ($n$) till $AM$ och fäll från en punkt $P$ på orten normalen $PN$ mot $n$. Cirkeln $M$ antages vara inskriven i triangeln. Enligt en känd sats av Euler (se uppg. 157, årg. 8, sid. 56) är då $\overline{PA}^2 - \overline{PM}^2 = 2PA \cdot r$. Men $\overline{PA}^2 - \overline{PM}^2 = 2AM \cdot PN$ (bevisas lätt). Härav fås $PA : PN = AM : r$ (= en konstant). Alltså ligger $P$ på en hyperbel med fokus i $A$, tillhörande styrlinje är $n$ och excentriciteten $= AM : r$.

Om cirkeln $M$ är vidskriven är $\overline{PM}^2 - \overline{PA}^2 = 2PA \cdot r$, och resultatet blir detsamma. $P$ övergår från den ena grenen till den

andra, då den rörliga tangenten är parallell med endera av de fixa. Hyperbelns asymptoter äro följaktligen vinkelräta mot de fixa tangenterna. Då normalerna från fokus mot asymptoterna träffa dessa på styrlinjen, utgöras orthyperbelns asymptoter i detta fall av normalerna mot de fixa tangenterna i deras skärningspunkter med *n*. *X*.

## Fysikaliska uppgifter.

Red. har haft nöjet mottaga fysikaliska uppgifter från flera förf. Uppgifterna ha sammanförts i grupper såsom i registret, årg. *16*, sid. 272. I detta häfte införas uppg. på *statik* (160—169) och *dynamik* (170—187). [1]

160) I en homogen jämntjock, cirkulär skiva med radien $r$ utskäres ett hål i form av en liksidig triangel med sidan $0{,}5r$ och en vinkelspets i skivans centrum. Sök läget av den så deformerade skivans tyngdpunkt.

Svar: $r/97{,}06$ från cirkelns medelpunkt.

161) I två angränsande av de 6 trianglar, vari en regelbunden 6-kantig, homogen och jämntjock skiva (sidan $= a$) delas av diagonalerna, utskäras hål i form av cirklar, som äro inskrivna i trianglarna. Sök läget av den så deformerade skivans tyngdpunkt.

Svar: $0{,}126\,a$ från diagonalernas skärningspunkt.

162) *ABC* är en vid C rätvinklig trådtriangel, gjord av jämntjock och homogen tråd, vägande 3 gram per dm; $AC = 3$ dm och $BC = 4$ dm. Triangeln upphänges medelst en fin tråd, fastbunden vid *AB*:s mittpunkt. Vid en av *AB*:s ändpunkter (vilken?) fästes en vikt, så avpassad att *AB* intar vågrät ställning. Bestäm viktens storlek.

Svar: 1,44 gram skall fästas vid *B*.

163) *ABC* är en liksidig, triangulär, jämntjock skiva vars tyngd är 12 kgf. *M* är mittpunkten på *BC*. De båda hälfterna *ABM* och *ACM* äro gjorda av ämnen med spec. vikterna 2 och 6 resp. Skivan vilar i horisontell ställning på tre stöd, anbragta i triangelns hörn. Beräkna trycken på dessa.

Svar: På *A*, *B* och *C* resp. 4, 3 och 5 kgf.

[1] Uppg. nr. 183, 184 äro insända av adjunkt O. Bergentz, Halmstad, nr. 165, 180 av rektor E. Hernqvist, Halmstad, nr. 169, 173, 174 av lektor T. Wetterblad, Stockholm, nr. 160, 161, 167, 168, 175—179 av lektor K. A. Wingårdh, Falun, nr. 162—164, 166, 170—172, 181, 185—187 av C. E. B.

164) En kropp $P$ vilar på ett strävt plan, som bildar 45° med horisontalplanet. Ett snöre, fästat i $P$, löper rakt uppför och parallellt med planet över en lättrörlig trissa vid planets *övre* kant och därefter lodrätt ned till en vikt $K$, fästad i snörets andra ända. Då $K$ är större än 4 kg eller mindre än 2 kg, kommer $P$ i rörelse. Beräkna storleken av friktionskraften, som verkar på $P$, då $K$ är a) 1 kg b) 2,5 kg c) 3 kg d) 3,5 kg e) 5 kg. Man får räkna med att 1 kg påverkas av kraften 1 kgf.

Svar: a) 1 kgf b) 0,5 kgf c) ingen d) 0,5 kgf e) 1 kgf.

165) En 5 meter lång stege, som väger 75 kg, står lutad mot en glatt vägg. Den bildar med marken en vinkel av 55°, och här förefinnes friktion med friktionskoefficienten 0,5. a) Huru långt upp på stegen kan en 95 kg tung person gå (med lodrät kroppsställning) utan att jämvikten störes? b) Vad blir svaret, om friktion förefinnes även vid väggen med friktionskoefficienten $= 0{,}2$?

Svar: a) 4,42 m. b) ända upp.

166) Från en kubisk låda av tunn, jämntjock och homogen plåt borttagas locket och två motstående sidoytor. Den så deformerade »lådan» lägges över en glatt cylinder, vars axel är horisontell, med såväl bottenytan som en av sidoytorna i kontakt med cylinderns mantelyta. Dennas diameter är hälften av lådans kantlinje. a) Beräkna den vinkel som bottenytan bildar med lodlinjen vid jämvikt i denna ställning, och sök förhållandet mellan trycken vid bottenytan och sidoytan. b) Undersök om »lådan» även kan intaga något annat jämviktsläge, hängande på cylindern, och om cylinderns diameter får ha godtycklig storlek.

Svar: a) 18°,4; 1 : 3. b) För att lådan skall kunna intaga det beskrivna jämviktsläget, får diametern vara högst $^2/_3$ av kantlinjen; detta är stabilt utom i gränsläget ($^2/_3$). Dessutom finnas labila jämviktslägen, då bottenytan är lodrätt resp. vågrät.

167) Specifika vikten hos vattnet i Östersjön är 1,013 och i Nordsjön 1,025. Enligt uppgift av kapten König på tyska handels-ubåten »Deutschland» (1916) måste sagda båt vid undervattensgång från Ö till N. inpumpa 17 ton vatten för att behålla undervattensläget. Beräkna härav båtens volym.

Svar: 1416,7 m³.

168) I ett cylindriskt kärl med 9 cm² bottenyta flyter i vatten en träcylinder med 4 cm² bottenyta och 2 cm höjd med axeln lodrät. Träets sp. v. är 0,7. Hur mycket olja med sp. v. 0,5 skall

hällas i cylindern, för att träskivans övre yta skall komma i jämnhöjd med oljeytan?

Svar: 6 $cm^3$.

169) En areometer utgöres av en ihålig, med blyhagel fylld glaskula och däröver ett jämntjockt, i lika stora volymdelar graderat glasrör. Delstrecken äro besiffrade 0, 1, 2 — — — etc. I vatten (sp. v. 1,00) sjunker areometern till delstrecket 20, i alkohol (sp. v. 0,80) till delstrecket 60. Vilket delstreck motsvarar sp. v. 0,90?

Svar: Delstrecket 38.

170) Mellan två stationer är avståndet 1 575 m. Ett tåg behöver 3 minuter för denna sträcka, räknat från det ögonblick det sätter igång till det ögonblick det stannar. Rörelsen antages vara likformigt accelererad under de 30 första sekunderna, likformigt retarderad under de 15 sista och hastigheten konstant under återstoden av tiden. Beräkna denna konstanta hastighet.

Svar: 10 m/sek.

171) Från den översta punkten på ett 30 m långt, strävt plan med lutningsvinkel 30° — vilken är friktionsvinkeln — kastas en kropp rätt nedåt längs planet med en hastighet av 10 m/sek. Samtidigt kastas en kropp uppåt planet från planets lägsta punkt så, att de båda kropparna sammanträffa mitt på planet. Beräkna de hastigheter, som kropparna inneha vid sammanträffandet. Accel. vid fritt fall är 5,8 $m/sek^2$.

Svar: 10 m/sek och 2,65 m/sek.

172) En kropp $A$ ($a$ gram) vilar på ett strävt lutande plan, vars lutning mot horisontalplanet är lika med friktionsvinkeln. Från kroppen löper ett snöre — rakt utför och parallellt med planet — över en trissa, fästad vid planets *undre* kant, och fortsätter därefter lodrätt ned till en fritt hängande vikt $B$ ($b$ gram). Hur stor är spänningen i snöret, då 1:o $A$ fasthålles på planet 2:o $A$ släppes och kropparna kommit i rörelse? Jordaccel. är $= g$. Man bortser från friktionen vid trissan och från dennas och snörets massa.

Svar: 1:o $bg$ dyn. 2:o $bg.\frac{a}{a+b}$ dyn.

173) En person vill föra en tung stång från ett ställe till ett annat. Han låter för den skull den ena ändan släpa utefter golvet, vid den andra fäster han ett rep, i vilket han drar. Då han fått stången att röra sig med jämn hastighet, är dess lutningsvinkel mot golvet 30° och repets motsvarande vinkel 75°. Beräkna härav friktionskoefficienten.

Svar: 0,4 (0,39).

174) Från foten av ett plan, vars lutningsvinkel är 45°, kastas en kropp med sådan elevationsvinkel, att den slår ned vinkelrätt mot planet. Huru stor del av den ursprungliga rörelseenergien besitter kroppen vid nedslaget?

Svar: 20% (elevationsvinkelns tangent = 3).

175) Svenska luftvärnsartilleriregementets nya 7 cm kanon (1930) har en maximistighöjd för 80° elevation av 9 200 m, då projektilens initialhastighet är 750 m/sek. Med vilket belopp nedbringar luftmotståndet stighöjden?

Svar: 18 640 m.

176) En liten glatt kula, vägande 100 g, ligger på ett glatt, horisontellt bord och är fästad i ena änden av ett 1 m långt snöre med hållfastheten 150 gf. Snörets andra ände är fäst vid en punkt på bordet. Kulan försättes i rotation kring snörets fästpunkt i bordet. Vid en viss hastighet brister snöret och kulan rör sig till kanten av bordet och vidare ned till det 2 m under bordskivan liggande golvet. Var träffar kulan golvet? Avståndet räknas från den punkt på golvet, som ligger rakt under den punkt, där kulen lämnar bordskanten.

Svar: 2,45 ($=\sqrt{6}$) m.

177) På ett strävt plan, som har en lutningsvinkel på 30°, lades en 5 kg tung kropp, som medelst ett med planet parallellt snöre över en trissa förbands med en fritt nedhängande lika tung vikt. I snöret var insatt en lätt dynamometer, vars tyngd försummas. Då kropparna kommit i rörelse, visade denna en spänning på 4,18 kgf. Sök friktionskoefficienten.

Svar: 0,2 (0,198).

178) Sök den största hastighet, som en bil, vägande 6 ton med en motor om 40 hkr, kan få uppför en backe med en lutningsvinkel, vars sinus är 0,01, om friktionskoefficienten är 0,01 och luftmotståndet är prop. mot hastigheten (i m/sek) och med prop.-faktor = 0,1.

Svar: 24,5 m/sek.

179) En kula glider utför ett 1 m långt, glatt plan med lutningsvinkeln 30° och faller därefter ned till den 1 m under planets lägsta punkt liggande horisontella marken, studsar, varvid 20% av kinetiska energien förloras, samt träffar ånyo marken. Sök avståndet mellan de båda punkter, där marken träffas. Man får räkna med, att vid stöten »infalls»- och »reflexions»-vinklarna äro lika stora, vilket ju innebär en approximation, då stöten ej är elastisk.

Svar: 2,08 m.

180) En isbeklädd bergssluttning slutar med ett 100 meters lodrätt stup. Ett isstycke rutschar utför sluttningen och kastas ut över bråddjupet med en hastighet av 50 m/sek ned mot marken vid bergets fot. Hur stor del av det fallande isstycket smälter vid stöten mot marken, om hälften av det härvid utvecklade värmet antas komma isen till godo? Isens smältvärme = 80, värmets mek. ekv. = 427 och jordacc. = 9,8 m/sek.²

Svar: 0,3%.

181) Från punkten *A* på den horisontella marken kastas en kula med god fart rätt uppåt och träffar efter 1 sekund en snedställd skärm i en punkt belägen 19,6 m ovanför *A*. Efter stöten lämnar kulan skärmen i horisontell riktning och träffar marken i *B*, 19,6 m från *A*. Beräkna förhållandet mellan kulans rörelseenergi i *B* och i *A*. Accel. vid fritt fall = 9,8 m/sek².

Svar: 0,8.

182) Två lika tunga kulor *A* och *B*, som hänga i snören, vilkas vikter kunna försummas, svänga med små utslagsvinklar i lodräta plan. Därvid göra *A* och *B* resp. 80 och 72 svängningar per minut. Kulorna hållas därefter så, att snörena äro raka och vågräta, och släppas. Beräkna förhållandet mellan a) de båda kulornas hastigheter, b) spänningen i snörena, då vardera kulan passerar sin lägsta punkt.

Svar: a) 9:10, b) 1:1.

183) På en vågrät, cirkelformig skiva, som kan sättas i rotation kring en lodrät axel genom skivans medelpunkt, ligger en liten kort, homogen cylinder på 30 cm från skivans rotationsaxel. Cylinderns buktiga yta stöder även mot spetsen av en kil, som är fastsatt vid skivan och i radiell riktning bildar ett lutande plan med 60° lutningsvinkel. Bestäm skivans varvantal, då cylindern börjar rulla uppför planet.

Svar: 71,8 varv per minut.

184) Sök lutningen mot den horisontella marken och den största hastighet, varmed en motorcykel får framföras utan att slira i en kurva med 15 m radie. Friktionskoefficienten mellan gummiringarna och marken är 0,4 vid släpfriktion ($g = 9{,}8$ m/sek²).

Svar: 68°,2; 27,6 km/tim.

185) Ett homogent metallblock har form av en rak pelare med höjden *H* m. Vinkelrätt mot en av basytorna borras ett cylindriskt hål, *h* m djupt. a) Det från blocket urborrade materialet befinnes väga *p* kg. Blocket placeras på ett horisontellt bord, först med den ena basytan mot bordet, därefter med den andra. Hur stor är skillnaden mellan den potentiella energien i de båda fallen? b) Om ett cylindriskt hål med bestämd radie skall borras, hur

djupt skall det göras, för att nyssnämnda skillnad skall bli så stor som möjligt?

Svar: a) $p(H-h)$ kgm, b) $H/2$.

186) I en vattenbassäng flyter ett parallellipipediskt isblock (spec. vikt = 0,9) av 4 dm tjocklek och 500 kg vikt. Hur stor förändring undergår systemets lägesenergi, då isblocket smälter?

Svar: Minskas 10 kgm.

187) Ett cylindriskt mätglas, vars inre genomskärningsyta är $2a$ m², står i vertikal ställning på ett bord och är delvis fyllt med vatten. En rak, homogen cylinder av spec. vikten $s$, höjden $h$ m och genomskärningsytan $a$ m² fasthålles strax ovan vattnet så, att dess undre yta befinner sig i vattenytan. Cylindern förflyttas därefter ned i vattnet så, att den övre ytan kommer i nivå med vattenytan. Hur mycket ändras systemets lägesenergi vid denna förflyttning? Man bortser från verkan av ytspänningskrafter.

Svar: Lägesenergin ändras $\frac{ah^2(2s-1)}{4}$ kgm. Den minskas, om $s > 0{,}5$ och ökas, om $s < 0{,}5$. Om $s = 0{,}5$, sker ingen ändring.

## Tidskrifter.

(Forts. från sid. 54.)

**Fysisk Tidsskrift**, København 1933, h. 3—6.

Ur Innehållet. C. B. Madsen, Elektronstraaler. — Chr. Winther, Ultrarøde Straaler. — A. J. Hansen, Om Spidstælleren. — M. Pihl, Angående forholdet mellem den moderne fysik og fysikundervisningen. — C. B. Madsen og T. Langvad, Aarhus Universitets fysiske og kemiske Institutter. — Chr. Jensen, Forsøg med Fotocellen. — N. V. Due, Ledningers Modstand. — T. Bjerge, Irving Langmuir; Om Langmuirs Undersøgelser af Cæsiumatomens Adsorption paa Wolfram. — R. E. H. Rasmussen, Lidt om Røntgenrørenes Tilblivelse. — Eksamensopgaver, Boganmeldelser.

**Den Høijere Skole.** Organ for Filologenes og Realistenes Landsforening. Årg. 1933, h. 1—20. Oslo.

I årg. 1933 ha förekommit följ. artiklar av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll. O. Lindstad, Yo-Yo som fysikapparat. — H. Heine, Forkortelse av metriske målbetegnelser. — T. H. Lund, Bestemmelse av en parabel. — O. F. Olden, Barkveds apparatsamling for sterkstrøm. — A. Søetorp, Isokrone svingninger. — T. H. Lund, En algebraisk opgave. — G. Juel, Ekskursjoner som ledd i kjemi- og fysiologiundervisningen. — R. Krekling, Noen skoleeksperimenter med den stroboskopiske skive. — Ett »Tillegg til Den høiere Skole» (58 sid.) innehåller norska, danska och svenska examensuppgifter givna under 1933.

# En diofantisk ekvation av tredje graden.

Av CARL BODLUND och AGNE WAHLGREN.

I den tyska upplagan [1] av DICKSON, Introduction to the theory of numbers (DICKSON-BODEWIG, Einführung in die Zahlentheorie) gives följande lösning i hela tal till ekvationen:

$$A^3 - B^3 = C^3 - D^3.$$

Sätter man [2]

$$A = x + r,\ B = x - r,\ C = y + s,\ D = y - s,$$

erhålles

$$r(r^2 + 3x^2) = s(s^2 + 3y^2). \qquad \text{(a)}$$

Sättes nu

$$2x = w + v,\ 2y = w - v,\ 2r = u + t,\ 2s = u - t,$$

blir den fullständiga lösningen:

$$t = \varrho T,\ u = \varrho U,\ v = \varrho V,\ w = \varrho W,$$

$$T = -6\alpha\beta\gamma, \qquad U = \alpha(\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2),$$
$$V = \beta(\alpha^2 + 3\beta^2 + 9\gamma^2), \quad W = 3\gamma(\alpha^2 + \beta^2 + 3\gamma^2).$$

Här äro $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ godtyckliga hela tal utan gemensam faktor; $\varrho$ är ett bråk, vars nämnare skall vara den gemensamma divisorn till $T$, $U$, $V$ och $W$, för att man skall få fram den minsta lösningen, när man låter täljaren vara 1. Sedan kan man naturligtvis välja en godtycklig täljare.

Denna lösning är *formellt* särdeles elegant. Men i praktiken blir den högst ohanterlig, på grund av att $T$, $U$, $V$, $W$

[1] Vi hava ej haft tillfälle att se det engelska originalet.

[2] Vi ha ändrat bokstäver och tecken för att underlätta en jämförelse med den följande lösningen.

ofta bli behäftade med mycket stora gemensamma faktorer, som måste bortskaffas genom $\varrho$:s nämnare. Så t. ex. erhålles lösningen $A = 12$, $B = 9$, $C = 10$, $D = 1$, om man väljer $\alpha = 39$, $\beta = 14$, $\gamma = 37$, då man får $T = -6 \cdot 39 \cdot 14 \cdot 37$, $U = 39 \cdot 6216$, $V = 14 \cdot 14430$, $W = 111 \cdot 5824$. Divideras med $40404 = 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, erhålles $t = -3$, $u = 6$, $v = 5$, $w = 16$, varav man slutligen får den nämnda lösningen. I efterföljande uppsats, som skrevs, innan vi fingo kännedom om Dicksons metod, ha vi lyckats erhålla lösningar, som så att säga mer ansluta sig till problemets natur, så att vi direkt erhålla värden utan eller med små gemensamma faktorer.

## I.

Ett tal av formen $m^2 + mn + n^2$, där $m$ och $n$ äro hela tal, kallas i det följande trinomtal och betecknas med symbolen $[m, n]$; $m$ och $n$ äro trinomtalets element. Följande satser inses omedelbart:

*Sats 1. Ett trinomtal ändras icke, om elementen byta plats;* $[m, n] = [n, m]$.

*Sats 2. Ett trinomtal ändras icke, om båda elementen byta tecken;* $[m, n] = [-m, -n]$.

*Sats 3. Om* $$l + m + n = 0, \tag{1}$$

*så är* $$[l, m] = [m, n] = [n, l].$$

På grund av dessa satser kan man i regel, utgående från ett elementpar, skriva ett trinomtal på 12 olika sätt. T. ex.

$$\begin{aligned} 19 = [3, 2] = [2, 3] = [-3, -2] = [-2, -3] = \\ = [-5, 3] = [3, -5] = [5, -3] = [-3, 5] = \\ = [2, -5] = [-5, 2] = [-2, 5] = [5, -2]. \end{aligned}$$

Av dessa former är det endast två, som ha båda elementen positiva. Dessa kallas i det följande primära former; alla tolv formerna sägas utgöra en formgrupp. Emellertid är att märka, att ett trinomtal kan ha flere par primära former, representerande var sin grupp om 12 former. T. ex. $91 = [6, 5] = [5, 6] = [9, 1] = [1, 9]$.

Till trinomtalen höra alla kvadrater, ty $a^2 = [a, 0]$. Om elementen äro lika, är trinomtalet tredje multipeln av ett kvadrattal, ty $[a, a] = 3a^2$. Om $p = [m, n]$ och $q$ är ett godtyckligt helt tal, är $pq^2$ ett trinomtal, ty $pq^2 = [mq, nq]$.

*Sats 4. Produkten av två trinomtal är ett trinomtal.*

Om

$$r = [m, n], \quad s = [m_1, n_1],$$

$$l + m + n = 0, \quad l_1 + m_1 + n_1 = 0,$$

blir

$$rs = [L, M] = [M, N] = [N, L],$$

där

$$L = mm_1 - nn_1, \quad M = nn_1 - ll_1, \quad N = ll_1 - mm_1,$$

$$L + M + N = 0,$$

vilket lätt kontrolleras genom direkt uträkning. Då $r$ och $s$ vardera ha 12 olika former, kunde man vänta en mängd olika former för $rs$. Men ett ombyte av tecken för elementen i $r$ eller $s$ (sats 2) medför endast teckenbyte för $L, M, N$. Ett ombyte av element i $r$ eller $s$ enligt sats 3 innebär en cyklisk permutation av $l, m$ och $n$, och detta medför en cyklisk permutation av $L, M, N$. Utbytes t. ex. $l, m, n$ mot $m, n, l$, får man:

$$L_1 = nm_1 - ln_1 = -(l + m)\, m_1 + l\,(l_1 + m_1) =$$

$$= ll_1 - mm_1 = N$$

och på samma sätt $M_1 = L$, $N_1 = M$. Om elementen byta plats (sats 1) i både $r$ och $s$, övergå $L, M, N$ till $-L, -N, -M$. Alla dessa nya former för $rs$ tillhöra samma grupp. Men om elementen byta plats endast för endera av faktorerna, t. ex. $r$, får $rs$ former, tillhörande en ny grupp. Vid bildandet av produkten kan man således inskränka sig till att använda de primära formerna

$$r = [m, n] = [n, m], \quad s = [m_1, n_1].$$

Men om $r$ eller $s$ har flere par primära former, erhållas även flere formgrupper för $rs$.

Ex. 1. Av

$$7 = [2, 1] = [1, 2] \text{ och } 13 = [3, 1]$$

erhålles

$$91 = 7 \cdot 13 = [6, 5] = [9, 1].$$

Ex. 2. Av

$$91 = [6, 5] = [5, 6] = [9, 1] = [1, 9] \text{ och } 19 = [3, 2]$$

erhålles

$$1729 = 91 \cdot 19 = [37, 8] = [40, 3] = [23, 25] = [47, -15];$$

av den sista formen erhålles primärformen $[32, 15]$.

Ex. 3. Av

$$91 \text{ och } 3 = [1, 1],$$

där båda elementen äro lika, erhålles endast

$$273 = [16, 1] = [11, 8].$$

Ex. 4. Av

$$7 = [2, 1] = [1, 2]$$

erhålles

$$49 = [5, 3] = [7, 0]; \quad 7^3 = [18, 1] = [14, 7];$$
$$7^4 = [35, 21] = [49, 0] = [39, 16].$$

Ex. 5. Av

$$7^2 = [5, 3] = [7, 0] \text{ och } 13 = [3, 1]$$

erhålles

$$637 = 7^2 \cdot 13 = [21, 7] = [23, 4] = [17, 12].$$

Som synes fördubblas antalet primärformer för varje ny primtalsfaktor (utom 3). Då lika faktorer uppträda, blir dock antalet mindre, såsom ex. 4 och 5 visa.

*Sats 5. Om ett primtal $p$ är divisor till ett trinomtal $[m, n]$, där $m$ och $n$ äro relativa primtal och intetdera är 0, är $p$ självt ett trinomtal.*

Satsen är ett specialfall av en allmännare talteoretisk sats. För beviset, som är tämligen vidlyftigt, hänvisas till arbeten i talteori, t. ex. Dicksons ovannämnda arbete.

*Koroll. Om ett trinomtal* $r = [m, n]$ *innehåller en primfaktor* $p$, *som ej är trinomtal, måste* $p$ *vara faktor till* $m$ *och* $n$,

$$\therefore r = [pm_1, pn_1],$$

*och* $r$ *måste innehålla faktorn* $p^2$.

Om däremot $p$ är ett trinomtal, kan $p^2$ vara divisor till $[m, n]$, utan att $p$ ingår såsom faktor i $m$ och $n$. (Se ex. 4 och 5 till sats 4!)

*Sats 6. Varje trinomtal kan skrivas* $3x^2 + y^2$, *där* $x$ *och* $y$ *äro hela tal. Omvänt är varje tal* $3x^2 + y^2$ *ett trinomtal.*

Ty på grund av identiteten

$$4[m, n] = 3(m + n)^2 + (m - n)^2 \qquad (2)$$

överföras formerna $r = [m, n]$ och $r = 3x^2 + y^2$ i varandra genom substitutionerna

$$x = \frac{m+n}{2}; \quad y = \frac{m-n}{2}.$$

Här kan man alltid få heltalsvärden på $x$ och $y$. Ty om $l$, $m$, $n$ äro trinomtalets element, förbundna genom likheten (1), måste ett eller tre element vara jämna. Om då ett jämnt element väljes till $l$, blir $m + n$ och således även $m - n$ jämnt.

*Sats 7. Varje primtal (utom 3), som är trinomtal, har formen* $6n + 1$, *och varje primtal av denna form är trinomtal.*

Ty om $p = 3x^2 + y^2$ är ett primtal, kan $y$ ej vara delbart med 3. Men både $(3k + 1)^2$ och $(3k + 2)^2$ ha formen $3m + 1$, varav följer, att $p - 1$ är delbart med 3 och naturligtvis även med 2. Omvänt om $p = 6n + 1$ är ett primtal, kan man alltid bestämma $x$, så att $[x, 1] = x^2 + x + 1$ blir delbart med $p$ (se noten sid. 6 i denna årg:s 1:a häfte!), och då är $p$ enligt sats 5 ett trinomtal.

## II.

Vi antaga $a$, $b$, $c$, $d$ vara en heltalslösning till ekvationen

$$a^3 - b^3 = c^3 - d^3, \tag{A}$$

som även kan skrivas

$$(a - b) \,.\, [a, b] = (c - d) \,.\, [c, d].$$

Vi antaga $z$ vara största gemensamma divisorn till $a - b$ och $c - d$ och sätta

$$a - b = rz, \; c - d = sz, \tag{3}$$

där $r$ och $s$ äro relativa primtal. Då blir

$$[a, b] = st, \; [c, d] = rt.$$

Här måste $r$, $s$ och $t$ vara trinomtal. Ty om $[a, b]$ eller $[c, d]$ innehåller någon primfaktor, som ej är trinomtal, måste denna faktor enligt kor. till sats 5 förekomma ett jämnt antal gånger. Om den då inginge till udda dignitet i $t$, måste den även ingå till udda dignitet i $r$ och $s$. Men detta är omöjligt, då $r$ och $s$ äro relativa primtal. En icke-trinomisk faktor kan således endast förekomma till jämn dignitet i $r$, $s$ eller $t$. Men alla kvadrater äro trinomtal. Enligt sats 4 äro då $r$, $s$ och $t$ trinomtal. Vi antaga därför $r$ och $s$ vara två godtyckligt valda trinomtal och skola söka de häremot svarande lösningarna till (A). Vi sätta

$$a + b = x, \; c + d = y. \tag{4}$$

Med användning av identiteten (2) erhålles då

$$3x^2 + r^2z^2 = 4st,$$
$$3y^2 + s^2z^2 = 4rt.$$

Elimineras $t$, erhålles:

$$3(rx^2 - sy^2) = z^2 \, (s^3 - r^3). \tag{B}$$

(Detta är Dicksons ekv. (a), om vi där utbyta $r$ och $s$ mot $rz$ och $sz$.)

Vi utbyta de obekanta $x, y$ mot $k, w$ genom substitutionerna

$$x = 2s^2 k - rw,$$
$$y = 2r^2 k - sw. \tag{5}$$

Då övergår (B) till

$$12rsk^2(s^3 - r^3) + 3w^2(r^3 - s^3) = z^2(s^3 - r^3),$$

$$\therefore\ 12rsk^2 = 3w^2 + z^2. \qquad (6)$$

Mot heltalslösningar $x, y, z$ till (B) svara ej alltid heltalslösningar till (6). Ty av (5) erhålles:

$$k = \frac{sx - ry}{2(s^3 - r^3)}; \quad w = \frac{r^2x - s^2y}{s^3 - r^3},$$

och efter eventuell förkortning *kan* det kvarstå en gemensam nämnare $g$, som är divisor till $2(s^3 - r^3)$. Men även $gx, gy, gz$ är en heltalslösning till (B), och häremot svara heltalsvärden på $k$ och $w$. M. a. o. om vi söka alla heltalslösningar till (6), erhålla vi alla heltalslösningar till (B), dock stundom multiplicerade med en faktor i $2(s^3 - r^3)$.

I (6) måste $w$ och $z$ båda vara jämna eller båda udda. Sättes då

$$w = -(u + v),\ z = u - v,$$

bli $u$ och $v$ hela tal, och enligt formeln (2) erhåller man

$$3rsk^2 = [u, v]. \qquad (7)$$

Om nu $k^2, r$ och $s$ äro givna i trinomtalsform, kan denna ekvation alltid lösas genom tillämpning av sats 4; $w$ blir då det till trinomtalet $[u, v]$ hörande tredje elementet, som bestämmes av likheten (1). Mot varje formgrupp för $3rsk^2$ svara 12 värdepar för $u, v$. Vi bortse från de former, som erhållas, därigenom att $u$ och $v$ byta plats, ty detta medför endast, att $a$ och $b$, liksom $c$ och $d$ byta plats. För varje formgrupp återstå då sex lösningar:

$$\begin{aligned} &x = 2s^2k \mp rw, \quad y = 2r^2k \mp sw, \quad z = \pm(u - v);\\ &x = 2s^2k \mp rv, \quad y = 2r^2k \mp sv, \quad z = \pm(w - u);\\ &x = 2s^2k \mp ru, \quad y = 2r^2k \mp su, \quad z = \pm(v - w). \end{aligned} \qquad (8)$$

Om $k = k_1k_2$ och vi skriva

$$3rsk^2 = [k_1u_1, k_1v_1], \qquad (7\,a)$$

blir $w = k_1w_1$, och $k_1$ blir gemensam faktor till $x, y$ och $z$.

Sedan denna faktor förkortats bort, blir t. ex. den första lösningen:

$$x = 2s^2k_2 - rw_1,\ y = 2r^2k_2 - sw_1,\ z = u_1 - v_1.$$

Men denna erhålles även direkt, om vi från början välja $k = k_2$. Om $k_1$ ej är ett trinomtal, är formen (7 a) enligt kor. till sats 5 den enda möjliga; men om $k_1$ är ett trinomtal, finnas, som förut nämnts, former för $3rsk^2$, där $k_1$ ej är faktor till elementen. Vi förlora således inga lösningar, om vi vid valet av $k$ inskränka oss till trinomtal och vid valet av formgrupper i (7) utelämna dem, där elementen ha en med $k$ gemensam faktor, ty dessa lösningar erhållas redan för mindre $k$-värden. Vidare kunna vi inskränka oss till positiva $k$-värden. Ty ett teckenbyte för $k$ och $w$ åstadkommer endast teckenbyte för $u, v, x, y, z$ och således teckenbyte för $a, b, c, d$. Däremot erhållas naturligtvis nya lösningar genom teckenbyte enbart för $w$.

Med användning av (3) och (4) erhålla vi nu av den första lösningen (8):

$$a = s^2k + ru,\ b = s^2k + rv,\ c = r^2k + su,$$
$$d = r^2k + sv, \qquad (9)$$

och motsvarande för de övriga. Om vi låta $b^3$ och $c^3$ byta plats i (A), kunna resultaten sammanfattas i följande dubbelidentitet:

$$(s^2k \pm ru)^3 - (r^2k \pm su)^3 = (s^2k \pm rv)^3 - (r^2k \pm sv)^3 = \\ = (s^2k \pm rw)^3 - (r^2k \pm sw)^3. \qquad (10)$$

Ex. $r = 1,\ s = 3$.

För $k = 1$ erhålles:

$$3rsk^2 = 9 = [3, 0];$$
$$\therefore u = 3,\ v = 0,\ w = -3.$$

Formeln (10) ger:

$$(9 \pm 3)^3 - (1 \pm 9)^3 = 9^3 - 1^3 = (9 \mp 3)^3 - (1 \mp 9)^3,$$

varav:

$$12^3 - 10^3 = 9^3 - 1^3,$$
$$6^3 + 8^3 = 9^3 - 1^3,$$
$$6^3 - 5^3 = 3^3 + 4^3, \qquad (g = 2).$$

Här är $g$ den gemensamma faktor till $a$, $b$, $c$, $d$, som förkortats bort.

För $k = [2, 1] = 7$ erhålles:

$$3rsk^2 = 9 \cdot 7^2 = [3, 0] \cdot [5, 3] = [15, 9];$$

$$\therefore u = 15,\ v = 9,\ w = -24;$$

$$(63 \pm 15)^3 - (7 \pm 45)^3 = (63 \pm 9)^3 - (7 \pm 27)^3 = \\ = (63 \mp 24)^3 - (7 \mp 72)^3,$$

varav:

$$\begin{aligned} 39^3 - 26^3 &= 36^3 - 17^3, && (g = 2) \\ 72^3 - 34^3 &= 39^3 + 65^3, \\ 6^3 - 4^3 &= 3^3 + 5^3, && (g = 13) \\ 24^3 + 19^3 &= 27^3 + 10^3, && (g = 2) \\ 54^3 + 20^3 &= 87^3 - 79^3, \\ 87^3 - 79^3 &= 48^3 + 38^3. \end{aligned}$$

---

Utgående från *en* av lösningarna (8), t. ex.

$$x_0 = 2s^2 - rw_0,\ y_0 = 2r^2 - sw_0,\ z_0 = u_0 - v_0,$$

kunna vi erhålla den fullständiga lösningen till (B) även på följande sätt.[1] Vi söka i stället rationella lösningar till ekvationen

$$3(r\xi^2 - s\eta^2) = s^3 - r^3, \qquad (B_1)$$

d. v. s. punkter på hyperbeln $(B_1)$ med rationella koordinater. En rät linje genom en dylik punkt och punkten $\left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\right)$ får rationell vinkelkoefficient $\frac{n}{m}$. Denna linje kan därför anges genom ekvationerna

$$\xi = \frac{x_0}{z_0} + mt,\ \eta = \frac{y_0}{z_0} + nt, \qquad (11)$$

där $t$ är löpande variabel. Insättas dessa uttryck för $\xi$ och $\eta$ i $(B_1)$, erhålles (jämte $t = 0$):

$$t = -2 \cdot \frac{rmx_0 - sny_0}{z_0(rm^2 - sn^2)},$$

[1] Metoden är hämtad från Dicksons ovan citerade arbete.

som insatt i (11) ger:

$$\xi = \frac{-(rm^2 + sn^2) \cdot x_0 + 2smn \cdot y_0}{(rm^2 - sn^2) \cdot z_0},$$

$$\eta = \frac{-2rmn \cdot x_0 + (rm^2 + sn^2) \cdot y_0}{(rm^2 - sn^2) \cdot z_0}.$$

Då blir fullständiga lösningen till (B):

$$\begin{aligned} x &= \pm \varrho X, \quad y = \pm \varrho Y, \quad z = \pm \varrho Z, \\ X &= -(rm^2 + sn^2) \cdot x_0 + 2smn \cdot y_0, \\ Y &= -2rmn \cdot x_0 + (rm^2 + sn^2) \cdot y_0, \\ Z &= (rm^2 - sn^2) \cdot z_0. \end{aligned} \tag{12}$$

där $m$ och $n$ äro hela tal och $\varrho$ ett bråk, vars nämnare $g$ väljes lika med största gemensamma divisorn till $X, Y$ och $Z$, för att man skall få med de minsta lösningarna till (B). De dubbla tecknen äro oberoende av varandra. Man förlorar inga lösningar, om man inskränker ett av talen $m$ och $n$ till positiva värden.

Ex. $r = 1$, $s = 3$.

För $k = 1$ blev $u = 3$, $v = 0$, $w = -3$. Den mellersta ekv. (8) ger då $x = 18$, $y = 2$, $z = 6$ eller efter förkortning

$$x_0 = 9, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 3.$$

Vi erhålla nu med användning av (12), (3) och (4) följande tabell (vi välja de positiva värdena för $x, y, z$):

| $m$ | $n$ | $g$ | $x$ | $y$ | $z$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 9 | 1 | 3 | 6 | 3 | 5 | — 4 |
| 1 | 1 | 2 | 15 | 7 | 3 | 9 | 6 | 8 | — 1 |
| 1 | — 1 | 2 | 21 | 11 | 3 | 12 | 9 | 10 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 51 | 29 | 3 | 27 | 24 | 19 | 10 |
| 2 | — 1 | 1 | 75 | 43 | 3 | 39 | 36 | 26 | 17 |
| 1 | 2 | 1 | 105 | 23 | 33 | 69 | 36 | 61 | — 38 |
| 1 | — 2 | 1 | 129 | 49 | 33 | 81 | 48 | 74 | — 25 |

o. s. v.

Vi skola undersöka, hur många gånger varje lösning till (A) återkommer, när vi låta trinomtalen $r, s, k$ antaga alla möjliga värden. Då är först att märka, att lösningarna $(a, b, c, d)$, $(a, c, b, d)$ och $(a, -d, c, -b)$ äro en och samma. De motsvaras av tre olika värdepar $(r, s)$. För samma värdepar $(r, s)$ ge de *fyra* rotparen $(\pm x, \pm y)$ samma lösning, ty teckenbyte för t. ex. $x$ medför endast, att $(a, b)$ utbytes mot $(-b, -a)$. Man skulle således få varje lösning 12 gånger. Men mot $(x, y)$ och $(-x, -y)$ svara $(k, w)$ och $(-k, -w)$ enl. (5). Då man, såsom förut framhållits, kan inskränka sig till positiva $k$-värden, återkommer således varje lösning endast 6 gånger. Så t. ex. erhålles identiteten

$$12^3 - 9^3 = 10^3 - 1^3 \qquad (13)$$

med användning av (7) och (9) för följande värden:

| $r$ | $s$ | $k$ | $u$ | $v$ | $g$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | 12 | 9 | 10 | 1 |
| 1 | 3 | 37 | −99 | −21 | 26 | 9 | 12 | −10 | −1 |
| 1 | 4 | 7 | −4 | −22 | 9 | 12 | 10 | −1 | −9 |
| 1 | 4 | 13 | 44 | 2 | 21 | 12 | 10 | 9 | 1 |
| 13 | 19 | 1 | 11 | −31 | 42 | 12 | −1 | 9 | −10 |
| 13 | 19 | 7 | 113 | −220 | 333 | 12 | −1 | 10 | −9 |

Söker man lösningarna till (A) med användning av (12), motsvaras de fyra rotparen $(\pm x, \pm y)$ av fyra olika värdepar $(m, n)$, utgörande nämnare och täljare i vinkelkoefficienten $k$ för de linjer, som förbinda punkten $P_0 = \left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0}\right)$ med de fyra punkterna $P_i = \left(\pm\frac{x}{z}, \pm\frac{y}{z}\right)$. Samma lösning erhålles således för 12 olika värdesystem $(r, s, m, n)$. Men förut har påpekats, att man kan inskränka ett av talen $m$ och $n$ till positiva värden. Om $P_0$ väljes i första kvadranten, blir $k$ positiv för linjen från $P_0$ till punkten $\left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}\right)$. Man förlorar således ingen lösning till (A), om man låter

*både* $m$ och $n$ vara positiva. Om punkterna $P_i$ ligga inom den rektangel, som bildas av $P_0$ och dess symmetripunkter i de andra kvadranterna, bli alla fyra $k$-värdena positiva. I övriga fall erhållas endast två positiva $k$-värden. Ju närmre till origo man kan förlägga $P_0$ genom lämpligt val av $x_0, y_0, z_0$, desto större blir således sannolikheten för att man erhåller varje lösning endast 6 gånger, om man använder positiva värden på $m$ och $n$. Så t. ex. erhålles identiteten (13) för följande värden:

| $r$ | $s$ | $x_0$ | $y_0$ | $z_0$ | $m$ | $n$ | $g$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 1 | 3 | 5 | 2 | 13 |
| 1 | 3 | 9 | 1 | 3 | 6 | 5 | 39 |
| 1 | 4 | 10 | 2 | 2 | 3 | 2 | 7 |
| 1 | 4 | 10 | 2 | 2 | 8 | 3 | 56 |
| 13 | 19 | 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 13 |
| [13 | 19 | 11 | 1 | 1 | 0 | 1 | 19] |
| 13 | 19 | 11 | 1 | 1 | 11 | 1 | 1554 |

Att man i 5:te och 6:te raden sätter $(m, n) = (1, 0)$ eller $(0, 1)$, innebär, att man behåller primärlösningen $(x_0, y_0, z_0) = (11, 1, 1)$.

Även den Dicksonska metoden ger varje lösning 6 gånger, vilket ej här kan utredas. Identiteten (13) erhålles för följande värdesystem:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $g$ |
|---|---|---|---|
| 39 | 14 | 37 | 40404 |
| 3 | 7 | 2 | 84 |
| 6 | 3 | 7 | 252 |
| 14 | 37 | 13 | 13468 |
| 7 | 2 | 1 | 28 |
| 111 | 39 | 14 | 121212 |

Som synes ger Dicksons metod betydligt större gemensamma faktorer än någon av våra båda metoder.

---

# Neutronen.

Av OSVALD LUNDQUIST.

## 1. Inledning.

Den av E. RUTHERFORD år 1911 uppställda teorien för atomernas byggnad antager som bekant varje atom vara sammansatt av en positivt laddad kärna, i vilken atomens hela massa i det närmaste är koncentrerad, jämte ett kärnan omgivande hölje av negativt laddade elektroner. Elektronens laddning, den s. k. elementarladdningen $\varepsilon$, utgör enligt R. A. MILLIKANS noggranna bestämningar $4{,}768 \cdot 10^{-10}$ elektrostatiska CGS-enheter. För ett element, vars ordningstal i det periodiska systemet är $Z$, utgör atomkärnans laddning $+ Z\,\varepsilon$ och antalet elektroner i höljet $Z$. Höljets totala laddning blir därför $= -Z\,\varepsilon$ och kompenserar sålunda den positiva kärnladdningen. Atomen kommer utåt att verka elektriskt neutral.[1] Vätet med ordningstalet 1 i det periodiska systemet har följaktligen den enklast byggda atomen. Dess kärna, den s. k. protonen, har laddningen $+ \varepsilon$; elektronhöljet innehåller endast 1 elektron.[2] Elementet nummer 2, helium, har kärnladdningen $+ 2\,\varepsilon$; elektronhöljet består här av 2 elektroner. Det tredje elementet, litium, har kärnladdningen $+ 3\,\varepsilon$ och 3 elektroner i höljet, det fjärde, beryllium, kärnladdningen $+ 4\,\varepsilon$ samt 4 elektroner i höljet o. s. v.

Att atomkärnan i sin ordning är uppbyggd av enklare

[1] Atomens diameter har beräknats vara av storleksordningen $10^{-8}$ cm, kärnans och elektronens omkring 1/100000 härav.

[2] Elektronens massa utgör i runt tal 1/1840 av protonens.

beståndsdelar har länge varit bekant. För denna uppfattning talar såväl det spontant förlöpande sönderfallet av de radioaktiva elementens atomkärnor som den av RUTHERFORD påvisade möjligheten att genom yttre ingripande åstadkomma en ombildning av de lättare elementens stabila kärnor.

Av de tre välkända strålningsarter, som spontant emitteras vid de radioaktiva processerna, äro som bekant $\alpha$- och $\beta$-strålarna av korpuskular natur och ha visat sig bestå av He-kärnor respektive elektroner. Då de radioaktiva fenomenen måste antagas ha sitt ursprung i processer, som förlöpa inom själva atomkärnan, har man av $\alpha$- och $\beta$-emissionen dragit den slutsatsen, att He-kärnor och elektroner ingå som beståndsdelar i de radioaktiva elementens kärnor. Den atomkärna, som återstår sedan en $\alpha$- eller $\beta$-partikel emitterats, får tydligen en annan laddning och därmed också en annan plats i det periodiska systemet. Det radioaktiva sönderfallet åtföljes därför av en spontant förlöpande elementomvandling. Det tredje slaget av radioaktiva strålar, $\gamma$-strålarna, äro ju i likhet med röntgenstrålarna av elektromagnetisk natur och skilja sig från dessa endast genom sin större genomträngningsförmåga (mindre våglängd). Man antager, att $\gamma$-strålarna uppkomma genom omlagringsprocesser inom själva atomkärnan på liknande sätt som röntgenstrålarna uppstå genom omlagringar inom atomens yttre elektronhölje.

Den radioaktiva elementomvandlingen förlöper fullkomligt spontant och kan på intet sätt genom yttre medel påverkas. Det var därför en upptäckt av största betydelse, då RUTHERFORD år 1919 för första gången påvisade en på konstgjord väg åstadkommen elementomvandling. Denna hänförde sig till kväve.

Snabba $\alpha$-partiklar från den radioaktiva substansen RaC′ fingo passera genom kvävgas. RUTHERFORD fann härvid, att vid stöt mellan $\alpha$-partiklar och kvävekärnor från de senare bortsprängdes vätekärnor (protoner). Sprängnings-

processen har senare direkt kunnat synliggöras och fotograferas med hjälp av WILSONS expansionskammare.[1] Fotografierna visa, att vid stöten mellan $\alpha$-partikeln och kvävekärnan, den förra infångas av kärnan samtidigt som en proton bortspränges. Fig. 1 återger ett av P. M. S. BLACKETT vid RUTHERFORDS laboratorium (Cavendish Laboratory) i Cambridge upptaget wilsonfotografi av sprängningsprocessen.[2] Strålningskällan, varifrån $\alpha$-partiklarna emitteras, befinner sig nedtill i figuren. De långa, ljusa linjerna markera $\alpha$-partiklarnas banor i wilsonkammaren. Banan näst ytterst till höger grenar sig plötsligt i två. I förgreningspunkten har $\alpha$-partikeln kolliderat med en kvävekärna. Efter stöten uppträda, som synes, blott två banspår. Analysen av fotografiet visar, att det ena banspåret (det långa, fina) härrör från en proton, det andra från en partikel, som är tre enheter tyngre än kvävekärnan. Härav framgår direkt, att $\alpha$-partikeln infångats av kärnan, ävensom att en proton emitterats. Processen får anses förlöpa enligt formeln [3]

Fig. 1. Wilsonfotografi av en kärnsprängning vid kväve genom bombardement med $\alpha$-partiklar.

$$_7N^{14} + {}_2He^4 = {}_8O^{17} + {}_1H^1.$$

[1] Om C. T. R. WILSONS metod att synliggöra korpuskelbanor, se uppsats av G. ISING i Kosmos, Bd 6, sid. 111, 1927—28.

[2] Ur G. GAMOW, Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität, Leipzig 1932, sid. 130—31.

[3] I beteckningen $_7N^{14}$ anger indexsiffran 7 kärnladdningen, vilken för kväve med ordningstalet sju utgör sju elementarladdningar. Exponenten 14 anger kärnans massa uttryckt i vätekärnans (protonens) som enhet. $_2He^4$ är beteckningen för $\alpha$-partikeln, vars massa är 4 gånger så stor som protonens. $_1H^1$ betecknar den bortsprängda protonen.

Av kväveatomen blir en syreatom med atomvikten 17 (syreisotopen $O^{17}$). Den kortare, krökta grenen i fig. 1 härrör från denna syreatom. Senare undersökningar ha visat, att från nästan alla de lättare elementens atomkärnor bortsprängas protoner vid $\alpha$-partikelbombardement, ett förhållande som tyder på, att protonen ingår som beståndsdel i dessa atomers kärnor.

Undersökningar över de lättare elementens atomkärnor, som utförts under de senaste åren, ha lett till upptäckten av ytterligare en kärnbeståndsdel, neutronen, en partikel med ungefär samma massa och storleksordning som protonen men utan elektrisk laddning. Neutronernas oladdade tillstånd förlänar dem en mycket hög genomträngningsförmåga. I detta avseende skilja de sig väsentligt från de tre tidigare kända, laddade materiebyggstenarna och påminna snarare om de hårda, radioaktiva $\gamma$-strålarna. På grund av denna egenskap höllos neutronstrålarna också i början för att vara $\gamma$-strålar.

Avsikten med denna uppsats är att söka ge en kortfattad framställning av några av de undersökningar över neutronstrålarna, som kunna vara av mera allmänt intresse.

## 2. Neutronens upptäckt.

År 1930 observerade W. Bothe och H. Becker vid Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i Charlottenburg, att några av de lättare elementen vid bombardement med $\alpha$-partiklar från polonium utsände en strålning av mycket hög genomträngningsförmåga. Efter denna Bothes och Beckers upptäckt påbörjade Irène Curie och hennes make F. Joliot vid l'Institut du Radium i Paris en undersökning för att närmare utröna effekten av att bestråla elementen litium, beryllium och bor med $\alpha$-partiklar från polonium. De första resultaten av dessa undersökningar, som publicerades i slutet av år 1931, visade, att $\alpha$-partikelbombardementet vid beryllium utlöste en strålning, som var väsentligt

mera genomträngande än den $\gamma$-strålning, som polonium jämte $\alpha$-strålningen spontant utsänder. Sålunda konstaterade CURIE och JOLIOT, att en blyskiva av 15 mm tjocklek var tillräcklig för att absorbera $\gamma$-strålningen från polonium, medan intensiteten för den från beryllium emitterade strålningen först efter passage genom ett 47 mm tjockt blyskikt minskades till hälften. Även elementen litium och bor befunnos vid $\alpha$-partikelbombardement utsända en strålning, som föreföll vara av samma natur som den från beryllium emitterade. Såväl intensiteten som genomträngningsförmågan hos denna strålning var dock vid litium och bor åtskilligt mindre än vid beryllium. CURIE och JOLIOT ansågo denna från Li, Be och B utsända strålning vara en »konstgjord» $\gamma$-strålning, som genom $\alpha$-partikelbombardementet utlösts från de bombarderade elementens atomkärnor.

I början av år 1932 offentliggjorde CURIE och JOLIOT nya undersökningar över Be-strålningen. Resultaten av dessa undersökningar blevo av avgörande betydelse för uppklarandet av dennas natur. Strålningen registrerades medelst en jonisationskammare i förening med en känslig elektrometer. Samma experimentalanordning hade CURIE och JOLIOT använt vid de tidigare undersökningarna. Intet anmärkningsvärt inträffade, om en tunn metallskiva (av Cu, Ag eller Pb) infördes mellan strålningskällan — ett stycke beryllium jämte ett omedelbart intill detta placerat poloniumpreparat — och jonisationskammaren. Insattes däremot en skiva av paraffin eller cellophan (substanser som innehålla väteatomer), så ökades jonisationen starkt i kammaren. Om man införde ett Al-blad mellan paraffinskiktet och jonisationskammaren, visade det sig emellertid, att jonisationen kunde nedbringas till det värde den hade, innan paraffinskiktet infördes. Härför var ett Al-blad av blott 0,2 mm tjocklek erforderligt. Detta ansågo CURIE och JOLIOT tyda på, att ökningen i jonisation härrörde från en ström av protoner, som Be-strålningen utlöste vid sin pas-

sage genom paraffin- (eller cellophan-)skiktet. Att den i paraffinet utlösta strålningen varken utgjordes av elektroner eller var av elektromagnetisk natur kunde CURIE och JOLIOT för övrigt genom särskilda försök visa. Då Be ersattes med B visade sig samma fenomen uppträda. Även de från B emitterade strålarna utlöste vid passage genom vätehaltiga substanser en strålning, som av allt att döma bestod av protoner. CURIE-JOLIOTS försöksanordning är schematiskt återgiven i fig. 2.

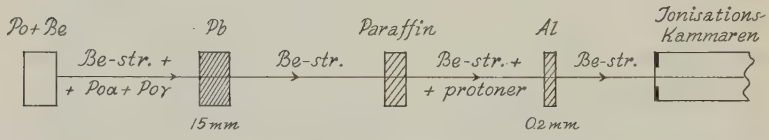



Fig. 2. Schematisk figur av CURIE-JOLIOTS försöksanordning vid bestrålning av paraffin med Be-strålningen.

Vid sina fortsatta försök studerade CURIE och JOLIOT Be-strålningen även medelst en WILSONS expansionskammare. I denna insattes en skiva paraffin, som passerades av strålningen. Av Be-strålningen själv kunde inga spår konstateras i expansionskammaren. Däremot framträdde tydligt några banor, härrörande från partiklar, som Be-strålningen utlöst ur paraffinskiktet. Banornas utseende visade, att dessa partiklar voro protoner.

Be-strålningen visade sig alltså besitta egenskapen att ur paraffin och andra vätehaltiga substanser frigöra protoner, något som man ännu aldrig funnit en $\gamma$-strålning vara i stånd till.

Av Be-strålningens egenskaper var det i främsta rummet den stora genomträngningsförmågan, som tydde på att strålarna voro av elektromagnetisk natur. Protonutlösningen ur vätehaltiga substanser var däremot ett faktum, som svårligen läte sig förenas med en $\gamma$-natur hos strålarna. Även andra experimentella fakta, på vilka vi här ej närmare skola ingå, talade emot antagandet, att den av CURIE och JOLIOT

undersökta strålningen var av samma natur som de radioaktiva $\gamma$-strålarna.

Kort efter det CURIE och JOLIOT offentliggjort sina iakttagelser beträffande Be-strålningens förmåga att ur vätehaltiga substanser utlösa protoner, publicerade J. CHADWICK i ett kort förhandsmeddelande från Cavendish-laboratoriet några av honom utförda undersökningar över den nya strålningen. CHADWICK framhåller här, att alla experimentella fakta kunna tillfredsställande förklaras om Be-strålningen antages vara av korpuskulär natur och består av oladdade partiklar. Det låg för CHADWICK därvid nära till hands att antaga, att dessa partiklar voro de av ett flertal forskare sedan länge förmodade neutronerna, partiklar, som man tänkte sig uppbyggda av en proton och en elektron i intim förening, och som därför borde ha ungefär samma massa och storleksordning som protonen.[1]

Då en neutron passerar en materiell substans, kommer den på grund av sitt oladdade tillstånd knappast att uppbromsas i sin rörelse annat än genom direkt stöt med en atomkärna. Neutronstrålarnas genomträngningsförmåga måste därför vara väsentligt större än de tidigare kända (laddade) korpuskularstrålarnas. Frånvaron av elektrisk laddning bör å andra sidan medföra, att neutronerna i mycket ringa utsträckning jonisera det medium de passera. CHADWICKS medarbetare P. I. DEE har ur undersökningar medelst wilsonkammaren beräknat, att en neutron i luft producerar högst *ett* jonpar på 3 meter av sin bana. Då det är de utmed en korpuskularstråles väg bildade jonparen, som utgöra kondensationscentra för vattenångan och förorsaka, att partikelns bana blir synlig i wilsonkammaren, blir det av DEES resultat omedelbart klart, varför neutronbanan ej framträder i densamma.

Neutronhypotesen kan således förklara såväl Be-strålningens stora genomträngningsförmåga som omöjligheten

[1] Benämningen *neutron* för en dylik partikel torde först (redan år 1903) ha använts av W. NERNST.

att synliggöra strålningen i wilsonkammaren. Strålningens egenskap att utlösa protoner ur vätehaltiga substanser får å andra sidan en tillfredsställande förklaring genom dess korpuskularnatur. Utlösningen blir nämligen den direkta följden av stötprocesser mellan neutroner och vätekärnor. De ur paraffin utlösta protonerna äro därför ingenting annat än vätekärnor, som efter stöt med neutroner utslungas ur paraffinskiktet.

CHADWICK, som i likhet med CURIE och JOLIOT undersökte Be-strålningen medelst jonisationskammare, konstaterade liksom dessa, att ett paraffinskikt mellan strålningskällan, (Po + Be), och jonisationskammaren starkt ökade jonisationen. Genom att absorbera de ur paraffinskiktet utlösta protonerna i aluminium fann CHADWICK, att de snabbaste (uppkomna genom rak, central stöt med neutroner) hade 40 cm räckvidd i luft. Ur räckviddsbestämningen beräknade CHADWICK, att den hastighet, som maximalt tilldelades en proton genom stöt av en Be-neutron utgjorde

$$v_H = 3{,}3 \cdot 10^9 \text{ cm/sek.}$$

CHADWICK konstaterade, att icke endast vätekärnor utan också atomkärnor av tyngre element bibringades höga hastigheter efter stöt med neutroner. CHADWICKS medarbetare N. FEATHER har i en med kvävgas fylld wilsonkammare, i vilken Be-neutroner fingo inträda, direkt kunnat synliggöra dylika atomkärnor (kvävekärnor), som genom neutronstöt försatts i snabb rörelse. Fig. 3 återger banan för en sådan av neutronstöt träffad N-kärna.[1] Den stötande neutronens bana — strålningskällan befinner sig nedtill i figuren — är osynlig i wilsonkammaren. Neutronen har

Fig. 3. Wilsonfotografi av elastisk stöt mellan en neutron och en kvävekärna.

[1] Ur: N. FEATHER, Proceedings of the Royal Society of London, Bd A 136, sid. 722—23, 1932.

obehindrat passerat flera cm av kammaren, innan den kolliderat med en N-kärna. Dennas bana efter stötprocessen framträder som den korta, ljusa linjen på fotografiet. Av banans längd kunde den hastighet beräknas, som N-kärnan genom stöten erhöll. CHADWICK och FEATHER funno för de snabbaste N-kärnorna (motsvarande rak, central stöt mellan neutronen och N-kärnan) hastigheten

$$v_N = 0{,}47 \cdot 10^9 \text{ cm/sek.}$$

CHADWICK framhåller, att felet i denna bestämning kan uppgå till 10 %.

Genom att kombinera detta försöksresultat med hastighetsberäkningen för de av neutronerna ur paraffinet utlösta protonerna

$$v_H = 3{,}3 \cdot 10^9 \text{ cm/sek.}$$

kunde CHADWICK beräkna neutronens massa.

Om $m_n$ betecknar neutronens massa, $v_n$ dess hastighet före stöten, $m$ den av stöten träffade atomens massa och $v$ dennas hastighet efter stöten, så blir enligt lagarna för rak, central, elastisk stöt

$$v = \frac{2m_n v_n}{m + m_n}.$$

Härav

$$v_H = \frac{2m_n v_n}{1 + m_n}; \qquad v_N = \frac{2m_n v_n}{14 + m_n},$$

och efter division:

$$\frac{v_H}{v_N} = \frac{14 + m_n}{1 + m_n} = \frac{3{,}3 \cdot 10^9}{0{,}47 \cdot 10^9},$$

vilken relation ger

$$m_n = 1{,}15.$$

Med hänsyn till det ganska stora felet i $v_N$-värdet ansåg sig CHADWICK härav berättigad draga den slutsatsen, att neutro-

nens massa, åtminstone i det allra närmaste, överensstämmer med protonens.

## 3. Neutronstrålningens uppkomst.

Enligt CHADWICK måste neutronen ingå som beståndsdel i de neutronemitterande elementens atomkärnor och neutronemissionen härröra från kärnsprängningsprocesser, varvid de från Po emitterade $\alpha$-partiklarna tjänstgöra som projektiler. CHADWICK antager, att den enskilda sprängningsprocessen tillgår så, att en $\alpha$-partikel infångas av atomkärnan samtidigt som en neutron bortspränges. Processen antages alltså vara analog med de tidigare (sid. 3—4) nämnda konstgjorda kärnomvandlingarna. Här bortspränges emellertid en neutron i stället för där en proton.

Omvandlingsprocessen vid bombardement av beryllium med $\alpha$-partiklar anser därför CHADWICK förlöpa enligt formeln

$$ {}_4\mathrm{Be}^9 + {}_2\mathrm{He}^4 = {}_6\mathrm{C}^{12} + {}_0\mathrm{n}^1 \qquad \text{I} $$

${}_0\mathrm{n}^1$ utgör beteckningen för den bortsprängda neutronen, vars laddning är $= 0$ och massa $= 1$. Genom sprängningsprocessen övergår berylliumatomen i en kolatom.

Vid elementet bor försvåras fastställandet av reaktionsförloppet därigenom, att detta element har två isotoper, som kunna komma ifråga, en med atomvikten 10 och en med atomvikten 11. Tidigare har man funnit, att bor tillhör de element, som vid $\alpha$-partikelbombardement emittera protoner. Det finnes vissa skäl som tala för att protonemissionen härrör från isotopen $\mathrm{B}^{10}$. CHADWICK anser det därför sannolikt, att neutronemissionen härrör från isotopen $\mathrm{B}^{11}$. Omvandlingsprocessen sker då enligt formeln:

$$ {}_5\mathrm{B}^{11} + {}_2\mathrm{He}^4 = {}_7\mathrm{N}^{14} + {}_0\mathrm{n}^1 \qquad \text{II} $$

$\alpha$-partikeln infångas av borkärnan, en neutron emitteras, boratomen övergår i en kväveatom.

Curie och Joliot ha vid sina fortsatta undersökningar konstaterat, att utom litium även fluor, natrium och aluminium vid $\alpha$-partikelbombardement utsända en svag strålning av samma natur som den från beryllium och bor emitterade. Denna strålning måste därför liksom Be- och B-strålningen anses bestå av neutroner. Även från elementen neon och magnesium har en svag neutronemission kunnat påvisas.[1] Några forskare meddela, att de även hos en del av de tyngre elementen konstaterat emission av neutroner (G. Kirsch o. R. Trattner; E. O. Lawrence o. M. S. Livingston).

## 4. Elementomvandling genom neutronstöt.

De å sid. 8 omtalade stötprocesserna mellan neutroner och kvävekärnor äro elastiska, de båda sammanstötande partiklarna undergå genom stöten ingen förändring. Feathers undersökningar medelst wilsonkammaren ge emellertid också exempel på oelastiska neutronstötar, sådana där den träffade kärnan undergår en omvandling i likhet med den som sker vid stöt mellan en $\alpha$-partikel och en atomkärna. Sålunda observerade Feather, att neutronerna i den med kvävgas fyllda wilsonkammaren ibland kunde ge upphov till tvenne partikelbanor med gemensam begynnelsepunkt. Fig. 4 återger en av Feathers wilsonfotografier över oelastisk stöt mellan en neutron och en kvävekärna.[2] Strålningskällan befinner sig nedtill i figuren.

[1] Ett noggrannare studium av den nyupptäckta strålningen har visat, att denna ej uteslutande består av neutroner, utan utgör en blandning av neutroner och $\gamma$-strålar. Av senare undersökningar (F. Rasetti, Bothe och Becker) har det även ledes framgått, att de av Bothe och Becker år 1930 utförda undersökningarna i huvudsak hänförde sig till denna $\gamma$-strålning och ej till den mera genomträngande neutronstrålningen. Detta beror på, att Bothe och Beckers försöksmetod var en annan — strålningen registrerades medelst en Geigers spetskammare — än Curie-Joliots och Chadwicks.

[2] Ur: N. Feather, Proceedings of the Royal Society of London, Bd A 136, sid. 722—23, 1932.

Fig. 4. Wilsonfotografi av oelastisk stöt mellan en neutron och en kvävekärna (kärnsprängning).

Den i wilsonkammaren osynliga neutronen har i partikelbanornas gemensamma utgångspunkt stött samman med en kvävekärna. Vid stöten har en partikel bortsprängts från kärnan. Den längre banan i figuren härrör från den bortsprängda partikeln, den kortare från den resterande atomkärnan. Ur uppmätningen av wilsonfotografierna kunde FEATHER draga vissa slutsatser beträffande detaljerna i sprängningsprocessen. Mätningarna tydde på, att det förekom två slag av neutronstöt, som resulterade i en sprängning av kvävekärnan.

Vid det ena slaget av stöt visade det sig, att neutronen upptogs av kvävekärnan samt att en $\alpha$-partikel bortsprängdes (den längre banan i fig. 4 härrör från $\alpha$-partikeln). Processen antager därför FEATHER förlöpa enligt formeln

$$_7N^{14} + {}_0n^1 = {}_5B^{11} + {}_2He^4. \qquad \text{III}$$

Kväveatomen övergår i en boratom (isotopen $B^{11}$). Denna process är tydligen raka omvändningen till den, som enligt CHADWICK förorsakar utlösningen av neutronstrålningen vid bor (jfr formel II). Vid det andra slaget av stöt tycktes neutronen däremot icke upptagas av kvävekärnan. Reaktionsförloppet var här svårare att definitivt fastställa. FEATHER anser det sannolikt, att åtminstone i vissa fall en proton bortspränges från kärnan.

Vid senare utförda undersökningar ha flera forskare (L. MEITNER o. K. PHILIPP; N. FEATHER; W. D. HARKINS, D. M. GANS o. H. W. NEWSON) konstaterat kärnsprängningar genom neutronstöt även vid andra element, såsom syre, fluor och neon.

## 5. Neutronens natur.

CHADWICK tänker sig neutronen som en komplex partikel, uppbyggd av en proton och en elektron i intim förening, CURIE och JOLIOT åter äro i sina senare arbeten av den uppfattningen, att neutronen är en elementarpartikel.

Om neutronen är sammansatt av en proton och en elektron, måste den för att vara stabil ha ett energiinnehåll, som är mindre än summan av den fria protonens och den fria elektronens. Enligt EINSTEINS lag om energiens tröghet [1] betyder detta, att neutronens massa måste vara något mindre än den sammanlagda massan av protonen och elektronen. En »massdefekt» måste därför uppkomma vid neutronens bildande. Utgående från den å sid. 10 anförda reaktionsformeln II kunde CHADWICK beräkna ett väsentligt noggrannare värde på neutronens massa än det å sid. 9 angivna. Denna beräkning synes ge vid handen att en massdefekt verkligen föreligger.

Beräkningen utförde CHADWICK enligt den mot den nämnda reaktionsformeln svarande ekvationen:

$$m_B + \left(m_{He} + \frac{E_{He}}{c^2}\right) = \left(m_N + \frac{E_N}{c^2}\right) + \left(m_n + \frac{E_n}{c^2}\right) \qquad \text{IV}$$

vilken uttrycker, att den sammanlagda massan av de i sprängningsprocessen deltagande partiklarna ej förändras genom stöten. $m_B$, $m_{He}$, $m_N$ och $m_n$ betyda massorna för borkärnan, $\alpha$-partikeln, kvävekärnan och neutronen samt $\frac{E_{He}}{c^2}$, $\frac{E_N}{c^2}$ och $\frac{E_n}{c^2}$ massekvivalenterna av $\alpha$-partikelns, kvävekärnans och neutronens kinetiska energier $E_{He}$, $E_N$ och $E_n$. Massorna $m_{He}$, $m_B$ och $m_N$ äro samtliga mycket noggrant kända genom ASTONS masspektroskopiska mätningar. För $\alpha$-partikeln beräknade CHADWICK den kinetiska energien ur

[1] $E = mc^2$; $m$ = den med energien $E$ ekvivalenta massan, $c$ = ljushastigheten = $3 \cdot 10^{10}$ cm/sek.

de bekanta värdena på Po-$\alpha$-partiklarnas massa och hastighet, för kvävekärnan och neutronen kunde energivärdena bestämmas genom experiment.

Uttryckt i atomviktsenheter[1] är $m_{He} = 4{,}0011$, $m_B = 11{,}0082$ och $m_N = 14{,}0042$. Vidare fann CHADWICK, att $\frac{E_{He}}{c^2} = 0{,}0057$, $\frac{E_N}{c^2} = 0{,}0006$ och $\frac{E_n}{c^2} = 0{,}0035$, även uttryckt i atomviktsenheter. Detta infört i ekvationen IV ger

$$m_n = 1{,}0067.$$

Felet i $m_n$-värdet utgör ungefär 1 enhet i tredje decimalen. Summan av proton- och elektronmassorna — vätets atomvikt — är 1,0078. Detta jämfört med värdet 1,0067 av neutronmassan ger en massdefekt å 0,0011 atomviktsenheter.[2] Existensen av denna massdefekt anser CHADWICK bilda ett starkt stöd för neutronens komplexa natur.

Det finnes emellertid andra fakta, som synas tyda på, att neutronen är en elementarpartikel. Denna föreställning har särskilt aktualiserats sedan det i slutet av år 1932 konstaterats existensen av ytterligare en ny art av korpuskler, de s. k. positronerna eller positiva elektronerna, partiklar med sannolikt samma massa som elektronen men med samma laddning som protonen (C. D. ANDERSON, Pasadena). Sålunda företräda CURIE och JOLIOT i deras senare arbeten den uppfattningen, att neutronen är en elementarpartikel, medan protonen däremot antages vara komplex och sammansatt av en neutron och en positron.

Härigenom kunna CURIE och JOLIOT enhetligt förklara förhållandena vid elementet bors omvandling genom antagandet, att alla de vid detta element konstaterade strålningsarterna härröra från isotopen $B^{10}$. Utom protoner och neu-

[1] Syrets atomvikt = 16,00000.

[2] Häremot svarar en bindningsenergi hos neutronen av $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ erg eller 1 miljon elektron-volt (jfr sid. 16).

troner åtföljda av $\gamma$-strålar, emitterar bor, enligt vad CURIE och JOLIOT nyligen funnit, jämväl positroner.

Enligt CURIE-JOLIOTs hypotes måste protonen, som här antages vara den sammansatta partikeln, förete en massdefekt relativt systemet fri neutron + fri positron. Utgående från antagandet, att såväl proton- som neutron- och positronemissionen från bor härröra från isotopen $B^{10}$ ha CURIE och JOLIOT för neutronens massa beräknat värdet

$$m_n = 1{,}012.$$

Detta värde anger, att en massdefekt å ej mindre än 0,005 atomviktsenheter måste uppkomma, om en neutron och en positron i enlighet med CURIEs och JOLIOTs föreställning sammansluta sig för bildning av en proton.

De båda här anförda beräkningarna visa, att olika värden å neutronmassan erhållas beroende på vilka antaganden man gör om bor-neutronernas ursprung. Dessa beräkningar förmå tydligen ej heller avgöra frågan om neutronens konstitution vare sig till den chadwickska eller den curie-joliotska hypotesens fördel. Ytterligare flera försök till en noggrann bestämning av neutronmassan ha under den senaste tiden företagits (J. R. DUNNING o. G. B. PEGRAM; R. M. LANGER; M. S. LIVINGSTON m. fl.). Genomgående erhållas siffror av samma storlek som för protonen. I de flesta fall ligga värdena mellan 1,006 och 1,008. Vare sig dessa mätningar eller de övriga hittills utförda undersökningarna över neutronen synas emellertid kunna lämna något bestämt svar på frågan, huruvida neutronen är komplex eller den utgör en elementär enhet.

CHADWICK antog redan vid sina första tydningsförsök av Be-strålningen, att neutronen besitter en utsträckning i rummet av samma storleksordning som den man tillskriver atomkärnan och elektronen ($10^{-13}$ cm). Nyligen utförda undersökningar över neutronernas spridning och absorption i olika substanser bestyrka detta antagande. Av dessa undersökningar framgår, att neutronerna vid stöt med

atomkärnor förhålla sig som elastiska klot av diametern $2{,}6 \cdot 10^{-13}$ cm (I. I. Rabi).

## 6. Neutronen som beståndsdel i atomkärnan.

Protonen och elektronen ha hitintills betraktats som de elementära byggstenarna i materien. $\alpha$-partikeln, som jämväl måste tänkas ingå som beståndsdel i atomkärnorna, har man ansett vara en komplex partikel uppbyggd av 4 protoner och 2 elektroner. Dessa måste härvid tänkas vara så tätt sammanslutna, att den komplexa partikelns utsträckning i rummet blir av samma storleksordning som protonens och elektronens. Ur de noggrant bestämda värdena på massorna av protonen, elektronen och $\alpha$-partikeln [1] finner man, att vid $\alpha$-partikelns bildande uppkommer en massdefekt $\Delta m = (4m_H + 2m_e) - m_{He} = 0{,}048 \cdot 10^{-24}$ gr. Häremot svarar enligt Einsteins lag ett energibelopp $= 0{,}048 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}$ erg $= 43 \cdot 10^{-6}$ erg eller 27 miljoner elektron-volt,[2] vilket utgör $\alpha$-partikelns bindningsenergi. Den utomordentliga storleken av detta energibelopp kan förklara det faktum, att $\alpha$-partikeln alltid uppträder som en enda enhet och ej låter sig sönderspjälkas i protoner och elektroner.

Redan långt före neutronens upptäckt har man sökt uppgöra ett strukturschema för de olika elementens atomkärnor under antagande, att dessa äro uppbyggda av protoner och elektroner. Härvid antogs, att inom varje atomkärna så många protonor och elektroner som möjligt voro samman-

[1] $\alpha$-partikelns massa $m_{He} = 6{,}598 \cdot 10^{-24}$ gr, protonens $m_H = 1{,}661 \cdot 10^{-24}$ gr, elektronens $m_e = 9{,}04 \cdot 10^{-28}$ gr.

[2] Detta värde anger, att ett katodstrålerör skulle behöva drivas med en spänning av 27 miljon volt för att katodstrålepartiklarna, som ju utgöras av elektroner, skola få en kinetisk energi lika stor som neutronens bindningsenergi. Beräkningen utföres enligt formeln $\varepsilon V = 43 \cdot 10^{-6}$ erg, där $V =$ spänningen och $\varepsilon$ elektronladdningen.

$$V = \frac{43 \cdot 10^{-6}}{4{,}77 \cdot 10^{-10}} \cdot 300 \text{ volt} = 27 \cdot 10^{6} \text{ volt.}$$

Kärnstrukturschema enligt F. Perrin.

| Element | Isotop | Ordn.-nummer Z | Atom-vikt A | Antal | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | α-partiklar | neutroner | protoner |
| Väte | $_1H^1$ | 1 | 1 | — | — | 1 |
| | $_1H^2$ | | 2 | — | 1 | 1 |
| Helium | $_2He^4$ | 2 | 4 | 1 | — | — |
| Litium | $_3Li^6$ | 3 | 6 | 1 | 1 | 1 |
| | $_3Li^7$ | | 7 | 1 | 2 | 1 |
| Beryllium | $_4Be^8$ | 4 | 8 | 2 | — | — |
| | $_4Be^9$ | | 9 | 2 | 1 | — |
| Bor | $_5B^{10}$ | 5 | 10 | 2 | 1 | 1 |
| | $_5B^{11}$ | | 11 | 2 | 2 | 1 |
| Kol | $_6C^{12}$ | 6 | 12 | 3 | — | — |
| | $_6C^{13}$ | | 13 | 3 | 1 | — |
| Kväve | $_7N^{14}$ | 7 | 14 | 3 | 1 | 1 |
| | $_7N^{15}$ | | 15 | 3 | 2 | 1 |
| Syre | $_8O^{16}$ | 8 | 16 | 4 | — | — |
| | $_8O^{17}$ | | 17 | 4 | 1 | — |
| | $_8O^{18}$ | | 18 | 4 | 2 | — |
| Fluor | $_9F^{19}$ | 9 | 19 | 4 | 2 | 1 |

slutna till $\alpha$-partiklar. Genom lämplig kombination av dessa tre beståndsdelar kunda man åstadkomma erforderliga laddningar och massor för de olika atomkärnorna. Sålunda tänkte man sig exempelvis de båda borisotopernas kärnor uppbyggda på följande sätt

$$\begin{cases} {}_5B^{10}\text{: } 2\alpha\text{-partiklar} + 2 \text{ protoner} + 1 \text{ elektron} \\ {}_5B^{11}\text{: } 2\alpha\text{-partiklar} + 3 \text{ protoner} + 2 \text{ elektroner.} \end{cases}$$

Redan vid beräkningen av bindningsenergierna för de olika atomkärnorna uppträdde emellertid svårigheter. Dessa beräkningar utvisa, att alla element tyngre än tenn ($Z = 50$)

måste vara instabila och förete ett tämligen starkt utpräglat spontant sönderfall. Med undantag för elementet 62, samarium, där helt nyligen en svag radioaktivitet konstaterats, ha emellertid inga element mellan $Z = 50$ och $Z = 80$ visat sig vara radioaktiva. Även andra experimentella fakta voro svåra att bringa i överensstämmelse med strukturschemat. Speciellt de »fria» kärnelektronerna vållade den teoretiska behandlingen av atomkärnan utomordentliga svårigheter. Sålunda måste man exempelvis antaga, att elektronerna i kärnan sakna vissa egenskaper, som tillkomma elektronerna i atomens yttre elektronhölje. De närmre detaljerna vid $\beta$-emissionen från de radioaktiva elementen förblevo också otydbara.

Upptäckten av neutronen har medfört, att man sökt revidera kärnstrukturschemat genom att införa neutronen som beståndsdel i atomkärnorna i stället för den fria kärnelektronen (F. Perrin; A. Landé o. a.). De teoretiska konsekvenserna härav ha undersökts och diskuterats av W. Heisenberg. Man har sålunda försökt uppställa ett kärnstrukturschema enbart med hjälp av protoner och neutroner, delvis sammanslutna till $\alpha$-partiklar. $\alpha$-partikeln tänker man sig härvid uppbyggd av 2 protoner och 2 neutroner i stället för tidigare av 4 protoner och 2 elektroner. Ett exempel på ett dylikt strukturschema återges i tabellen å föregående sida.[1] Schemat omfattar de år 1932 kända isotoperna av de nio första elementen i det periodiska systemet. Detta nya strukturschema synes bättre än det gamla förmå tyda föreliggande erfarenhetsfakta över atomkärnornas sammansättning och stabilitet.

[1] Ur F. Perrin: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Bd 194, sid. 1344, 1932.

# Om toning av fotografiska silverbilder.

## En översikt av olika förfaranden.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Vid de vanliga fotografiska kopieringsmetoderna uppbygges bilden av silver, och dess ton blir grå till svart. Genom behandling med olika »tonbad» kan emellertid bildens färgton förändras. Då på detta område en rad lämpliga uppgifter kunna erhållas för det enskilda arbetet på gymnasiet, så skall jag här söka giva en översikt över de vanligast använda toningsmetoderna ur kemisk synpunkt. Jag har så mycket större skäl härtill som gängse receptsamlingar och läroböcker i regel ej pläga lämna någon dylik teoretisk handledning. Däremot skall jag ej uppräkna olika toningsrecept utan hänvisar till handböckerna.[1]

Vid toningen överföres silvret i bilden till någon färgad förening av något slag eller ersättes med annan metall eller förening. Ju tätare bilden är på ett ställe, desto mer färgad substans finnes alltså på detta ställe. Däremot äro alltid dagrarna i en tonad bild rena och ofärgade eller böra åtminstone vara detta. Anmärkas bör, att bildens färgton ej enbart bestämmes av bildsubstansens kemiska natur utan även av dess dispersion. — Vid s. k. färgade bilder, vilka ej böra förväxlas med tonade bilder, består bilden fortfarande av rent silver (av exempelvis svart ton), medan däremot papperets gelatinyta är indränkt med någon färg.

[1] L. P. Clerc: La Technique photographique, II, Paul Montel, Rue Saint Jacques 189, Paris 1927. J. M. Eder: Rezepte und Tabellen. Verlag von Knapp in Halle. 1933. — Ett antal recept finnes även i H. Bäckström: Lärobok i fotografi, Wahlström & Widstrand, Stockh. 1929. samt Konsten att filma, Lindblads Förl., Upsala 1931.

Denna är alltså starkast framträdande i dagrarna. Färgning förekommer särskilt vid diapositiver (t. ex. kinofilm).

Här skall egentligen endast bliva fråga om toning. De olika förfaranden härför, som nått praktisk betydelse, kunna indelas i ett fåtal grupper. Som första grupp taga vi de metoder, som bestå i

1. *Silverbildens överförande i en bild av annan metall.* Dessa metoder grunda sig därpå, att metallerna kunna ordnas i den s. k. elektrolytiska spänningskedjan så beskaffad, att varje ämne, som kommer före ett annat i kedjan, förmår utdriva det senare ur dess lösningar. En del av spänningskedjan utgöres av följande serie metaller: Mg, Al, Mn, Zn, Fe, Co, Ni, Sn, Pb, H, Cu, Hg, Ag, Pt, Au. På grund av silvrets plats så nära kedjans slut, är det endast ett fåtal metaller, som kunna utdrivas av silver, nämligen guld och platinametaller, med andra ord de ädlaste metallerna. Särskilt vid de nu knappast längre brukliga utkopieringspapperen användes toningsförfaranden med ädelmetaller i stor utsträckning.

För guldtoning använder man en lösning av guldklorid ($AuCl_3$) eller salter av guldklorvätesyra (t. ex. $NaAuCl_4$). Toningen äger rum exempelvis enl. formeln: $AuCl_3 + 3Ag = = 3AgCl + Au$. I sur lösning ($HAuCl_4$) erhålles en mer rödaktig ton, i neutral en mer blåviolett. Då denna senare nyans var modern, neutraliserades lösningen med pulver. krita ($CaCO_3$), som låg på förvaringskärlets botten (H. DE MOLARD 1851). Efter toningen måste fixeras, emedan bilden innehåller silverklorid (se reaktionsformeln).

Sättes en rodanid till en guldkloridlösning, så erhålles först en fällning, som löser sig i överskott av rodaniden. Då en dylik lösning löser den bildade silverkloriden (rodaniderna äro ju fixermedel), så kan guldet i detta fall bättre komma åt hela silverkornet, och en större del av silvret ersättes därför vid toningen med guld. NOVAK har visat, att vid vanlig guldtoning endast $^1/_3$—$^1/_5$ av silvret i bilden er-

sättes med guld, vid rodantoningen däremot större delen (80%). Dylika bad hava i stor utsträckning använts för toning av utkopieringspapper och även något för toning av framkallningspapper.

Platina- och palladium-toning sker efter liknande principer. Platina ger vackra svarta toner. Det använda saltet är kaliumplatinaklorur ($K_2PtCl_4$). Toningsreaktionen kan skrivas: $K_2PtCl_4 + 2Ag = 2KCl + 2AgCl + Pt$. Platinatoningen kombineras ofta med guldtoning.

2. *Svavel- och selentoning.* Denna grupp toningsförfaranden är den vid framkallningspapper vanligaste; svaveltoningen användes därvid för att ernå varmare toner och mer genomskinliga skuggor. Silverbilden överföres i svavelsilver. Man skiljer på direkta och indirekta svaveltoningsmetoder.

Vid den direkta svaveltoningen låter man svavel direkt förena sig med silverbilden till svavelsilver ($Ag_2S$). Genom kokning av en gemensam lösning av natriumtiosulfat (20%) och alun (4 à 5%) frigöres svavel i ytterst finfördelat tillstånd (kolloidalt). Vi kunna tänka oss reaktionen förlöpa i följande två stadier:

I. $Al_2(SO_4)_3 + 3Na_2S_2O_3 = Al_2(S_2O_3)_3 + 3Na_2SO_4$
II. $Al_2(S_2O_3)_3 + 3H_2O = 2Al(OH)_3 + 3SO_2 + 3S.$

I stället för detta tillvägagångssätt (L. Baekeland 1888) kan man även erhålla svavelutfällning genom att till tiosulfatlösningen sätta en syra (Lumière & Seyewetz 1912). Ofta användes för svavlingen även en lösning av svavel i svavelnatrium. I samtliga angivna fall får svavel angripa silverbilden och giva upphov till svavelsilver. Det alunhaltiga tonbadet brukas vid en temperatur av cirka 50° à 60°, de övriga vid lägre temp. Efter toningen bör man med en bomullssudd avlägsna på bildens yta löst häftande svavelpulver.

Mera använd är den indirekta svaveltoningen. Där-

vid omvandlas silverbilden först till bromsilver genom behandling med bromkalium (KBr) och ett oxidationsmedel (mestadels rött blodlutsalt):

$$2Ag + 2K_3(CN)_6Fe + 2KBr = 2AgBr + 2K_4(CN)_6Fe.$$

Bromsilverbilden överföres sedan medelst en svavelnatriumlösning till svavelsilver:

$$2AgBr + Na_2S = Ag_2S + 2NaBr.$$

I svavelnatriumbadet går toningen mycket raskt, och bruna nyanser erhållas. Önskas mer i gulbrunt gående toner, tillsättes något tiosulfat till tonbadet eller också utgöres detta av svavel, löst i svavelnatrium. I stället för dessa enkla svavelföreningar har man även föreslagit toning med mer komplicerade svavelföreningar, t. ex. Schlippes salt (natriumtioantimonat). I detta fall erhålles förutom svavelsilver något litet orangerött svavelantimon i bilden (Carey-Lea 1865). — Man har ibland kombinerat svaveltoning med guldtoning (Dunning 1907), varigenom karminröda toner erhållas. Bilden består därvid av svavelsilver och svavelguld.

Närbesläktade med svaveltoningen är selen- och tellurtoning. Därvid begagnas mest en lösning av ett selenosulfat t. ex. ($Na_2SSeO_3$); detta kan betraktas som ett sulfat, där en syreatom ersatts med selen (analogt med S i tiosulfater). Selentoningen ger brunsvarta till rödaktiga toner och användes ofta som ersättning för den dyrbarare guld- och platinatoningen. Analoga tonbad finnas med tellur.

För framkallningskopior användes även ofta ett par mer om svaveltoningen härovan erinrande metoder. Som tonande substans användes därvid natriumselenosulfid (NaSeS), erhållen genom upplösning av selen i svavelnatrium. Detta bad brukas antingen direkt eller efter blekning (överföring av bilden till bromsilver) och ger sepiatoner.

3. *Tonfixerbad* blevo redan 1850 föreslagna av Le Gray men funno först användning efter 1890. Tonfixerbadet innehåller natriumtiosulfat (= fixernatron), ett blysalt och

guldklorid. Det ger mycket vackra toner på utkopieringspapper. Då sådana emellertid numera äro nästan helt ur bruk, skall jag ej närmare ingå på detta slag av toning.

4. *Silverbildens överförande i en färgad ferrocyanid (tvåbadsmetoder).* — Ett stort antal av de viktigaste toningsförfarandena avse bildens överförande i en ferrocyanid av karakteristisk färg. Som en grov indelning av dessa metoder särskilja vi en- och tvåbadsmetoder, alltefter den färgade ferrocyanidens bildning genom en eller två processer.

Vi skola här först behandla de egentliga tvåbadsmetoderna. Vid dessa låter man först en lösning av rött blodlutsalt ($K_3(CN)_6Fe$) påverka silverbilden, varigenom denna omvandlas till ferrocyansilver:

$$\text{I.}\quad 4Ag + 4K_3(CN)_6Fe = Ag_4(CN)_6Fe + 3K_4(CN)_6Fe.$$

Det bildade gula blodlutsaltet går i lösning, och vitt olösligt ferrocyansilver återstår. Behandlas detta med ett bad, innehållande ett lösligt metallsalt, så sker en omsättning så, att den ifrågavarande metallens ferrocyanid uppstår jämte ett silversalt med den tillförda negativa jonen. Som exempel må anföras en toning med kopparklorid ($CuCl_2$).

$$\text{II.}\quad Ag_4(CN)_6Fe + 2CuCl_2 = Cu_2(CN)_6Fe + 4AgCl.$$

Den samtidigt med ferrocyankopparn bildade silverkloriden bortlöses sedermera medelst ett fixerbad. En rödbrun ferrocyankopparbild återstår.

På liknande sätt äga tvåbadstoningar med salter av andra metaller rum. De erhållna tonerna äro följande:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bly ..... | vit | Molybden ... | brun |
| Järn ..... | blå | Nickel ..... | rödbrun (grön?) |
| Kobolt ..... | rödviolett | Uran ..... | rödbrun |
| Koppar ..... | röd eller brun | Vanadin ... | orangegul |

Tabellen upptager även bly, vars ferrocyanmetall är vit och ej lämpar sig för självständig toning men lätt kan överföras i andra föreningar av karakteristisk färg (se nedan).

5. *Silverbildens överförande i en färgad ferrocyanid (enbadsmetoder).* — Många metaller bilda svårlösliga ferrocyanider men däremot lösliga ferricyanider. I så fall kan en lösning av ifrågavarande ferricyanid erhållas genom blandning av rött blodlutsalt och ett salt av metallen ifråga. Nedlägges silverbilden i detta bad, så kommer silvret att reducera ferricyaniden till ferrocyanid, och som denna är olöslig, så utfaller densamma och giver upphov till den nya bilden. Taga vi som exempel koppartoning enligt enbadsmetoden, så kan toningsreaktionen skrivas:

$$4Ag + 2Cu_3[(CN)_6Fe]_2 = 3Cu_2(CN)_6Fe + Ag_4(CN)_6Fe.$$

Ferrocyansilvret kan sedermera avlägsnas genom fixering (surt fixerbad), varefter ferrocyankopparbilden återstår. På liknande sätt vid andra metaller (se tabellen under 4).

I detta sammanhang bör påpekas, att kopparferricyaniden är olöslig i vatten, varför tonbadet försättes med oxalsyra, citronsyra eller vinsyra. Därvid löses ferricyankopparn genom komplexbildning. Övriga ferricyanider äro visserligen lösliga men org. föreningar tillsättas det oaktat för att något minska reduktionens hastighet. Tonbadet får nämligen ej vara så lätt reducerbart, att förutom silverbilden även gelatin och små spår av andra substanser sönderdela detsamma.

Jämföras reaktionsformlerna vid toning medelst ett och två bad, så finna vi, att enbadsmetoden ger mörkare och kraftigare bild. I detta fall motsvaras 4 silveratomer hos den ursprungliga bilden av 3 molekyler ferrocyankoppar, medan tvåbadsmetoden endast ger en molekyl ferrocyankoppar.

6. *Dubbeltoningar o. d. enligt ferrocyanmetoden.* — Vid det just diskuterade enbadsförfarandet uppstår förutom ferrocyankoppar (eller annan ferrocyanid) även ferrocyansilver. Vi angåvo att detta kan avlägsnas medelst fixering. Emellertid kan detta ferrocyansilver även omsättas till annan ferrocyanmetall i enlighet med tvåbadsförfarandets reak-

tion II. Därvid kan naturligtvis samma metall väljas, som finnes i den först erhållna ferrocyanbilden; i så fall förstärkes denna ytterligare. Man kan emellertid likaväl välja en annan metall, varigenom blandtoner erhållas. Vanadin — järn ger exempelvis gröntoning, uran — koppar brunviolett, o. s. v. Härvid kunna även ferrocyanider framställas, som i och för sig äro för ljusa men i blandning med andra giva vackra toner.

I stället för en ferrocyantoning nummer två kan den erhållna silverföreningen överföras till svavelsilver genom inverkan av $Na_2S$, varigenom dubbeltoner kunna åstadkommas.

Det nämndes tidigare, att det vita ferrocyanblyet knappast har någon användning som tongivande substans. Det kan emellertid lätt omvandlas i andra färgade föreningar (t. ex. gult blykromat, svart svavelbly eller brun blysuperoxid) och användes därför stundom som mellanstadium. Det bör vidare påpekas, att man lätt kan omvandla en ferrocyanblybild till andra ferrocyanmetaller t. ex. med järn, koppar, mangan, kobolt, under förutsättning att dessa äro ännu mer svårlösliga. De härvid erhållna tonerna äro ej fullt identiska med de direkt enligt en- eller tvåbadsmetoderna erhållna utan lära i åtskilliga fall vara vackrare.

7. *Silverbildens omvandling till en färgbild.* Det finnes ett stort antal utomordentligt vackra färgämnen, tillhörande den organiska kemiens område, vilka numera kunna utnyttjas för toningsändamål. Härvid användas endast basiska färgämnen, vilka dessutom skola vara vattenlösliga. Lättast går det att tona diapositiva bilder (skioptikonbilder, kinofilm). Nedlägges en sådan direkt i färgbadet, så uppsuger gelatinet färglösningen, men denna avlägsnas åter vid sköljning med vatten och någon toning äger ej rum. Nu finnes det emellertid s. k. betmedel, som förmå fasthålla färgen. Omvandlar man sålunda silverbilden till ett sådant betmedel, så kommer bilden att fasthålla färg i proportion till sin täthet, och den kan nu även utsättas för sköljning i vatten utan risk.

Som betmedel kan man använda silverjodid, olika ferrocyanider, kopparrodanid m. fl. En del av dessa betmedel äro själva rätt starkt färgade, vilket dock saknar betydelse, såvida ej särskilt rena färger önskas (t. ex. i trefärgsfotografien). Sedan betningen är verkställd och bilden sköljd. nedföres den i färgbadet, varvid en färgbild uppstår. Det finnes talrika färger att välja på (krysoidin, rodamin, safranin, akridinorange, auramin, tioflavin, malakitgrönt, metylengrönt, metylenblått. metylviolett, etc.), och dessutom kan man genom blandning av dem få nya nyanser. Färgbadens koncentrationer bruka hålla sig mellan 0,2 och 10 gr färg per liter.

Toning på papper ställer sig vida besvärligare, emedan pappersfibrerna taga till sig och behålla färg. För att undvika dessa svårigheter pressas den betade bilden med baksidan i kontakt med en spegelglasskiva, så att färglösningen ej på denna väg kan nå papperet. Med en mjuk flat pensel påföres sedan färglösningen, som bör vara relativt koncentrerad för att verka snabbt; därefter sköljning.

8. *Färgning av bilder. Avslutning.* Som i inledningen omnämndes, måste man skilja mellan toning och färgning. Medan vid tonade bilder själva bildsubstansen är färgad och dagrarna färglösa, hava de färgade bilderna själva bildsubstansen oförändrad, medan gelatinet i bilden är färgat. Dylik färgning förekommer i stor utsträckning vid diapositivbilder, framförallt kinemotografisk film.

Till färgning av bildgelatinet använder man sura färgämnen, och det finnes en stor mängd dylika att välja på. De brukas i koncentrationer av 0,1—2 %; färgningen tar cirka 3 min. för plåtar och film, kortare tid för papper. Genom kort sköljning avlägsnas vid ytan häftande färg.

Givetvis kan en bild både tonas och färgas, varvid färgningen sker efter det toningen är färdig. Dylika kombinationer förekomma ifråga om kinematografisk film.

---

## Sfäriska trigonometriens grundformler.

### Ett tillägg.

I denna tidskrifts decemberhäfte 1933 sid. 222 visade jag bl. a., hur man kan härleda den sfäriska trigonometriens cosinussats med hjälp av den kända rymdanalytiska formeln

$$\cos v = \cos\alpha\ \cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\ \cos\gamma' \qquad (1)$$

I årets första häfte sid. 45 har S. Bagman givit en härledning av cosinussatsen, vilken ej omedelbart bygger på nyssnämnda ekv. (1). Denne förf. använder liknande tillvägagångssätt, som ibland kommer till användning i den plana trigonometrien vid härledning av formeln för $\cos(\alpha - \beta)$. B. utgår nämligen från det rymdanalytiska uttrycket för avståndet mellan två punkter i rymden och tillämpar cosinusteoremet. Det kan måhända förtjäna påpekas, att denna metod lika bra kan användas vid deduktionen av den generella formeln (1).

Vi utgå från två punkter $A$ och $A'$ på enhetssfären, vilken har sin medelpunkt förlagd i origo $O$. Punkternas koordinater antagas vara $(x; y; z)$ och $(x'; y'; z')$; riktningscosinerna för $OA$ och $OA'$ resp. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ och $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$; vinkeln mellan $OA$ och $OA'$ $v$.

Enligt formeln för avståndet mellan två punkter i rymden och cosinusteoremet erhålles

$$2 - 2\cos v = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

varav, eftersom $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$,

$$\cos v = xx' + yy' + zz'.$$

Emedan $\quad x = \cos\alpha \quad y = \cos\beta \quad z = \cos\gamma$

$$x' = \cos\alpha' \quad y' = \cos\beta' \quad z' = \cos\gamma',$$

får man härav formel (1).

Det kan vara instruktivt att påpeka, att denna rymdtrigonometriska formel just motsvarar den plana trigonometriens formel för $\cos(\alpha - \beta)$. Den senare erhålles som specialfall av (1), om man sätter $\gamma = \gamma' = 90°$ och utbyter $\beta$ — som i $\cos(\alpha - \beta)$ räknas från $x$-axeln — mot $(90° - \alpha)$ och $\beta'$ mot $(90° - \alpha')$.

*Sture Nydell.*

# Bokanmälningar.

W. Heisenberg, E. Schrödinger, P. A. M. Dirac, *Die moderne Atomtheorie*, tre Nobelföredrag. S. Hirzel, Leipzig, 1934. 45 sid., RM 2: 50.

P. Debye, *Struktur der Materie*, fyra föredrag. S. Hirzel, Leipzig 50 sid., RM 3: —.

Karl Rast, *Atomtheorie und Atombau*, J. A. Barth, Leipzig, 1934. 136 sid., RM 6: 60.

Av Nobelföreläsningarna är Diracs den kortaste och trots det den, som mest ingående behandlar det tema, som prisbelönats, i detta fall teorin för den positiva elektronen. Schrödinger klargör synnerligen populärt, att sambandet mellan materia och ljusvågor kunnat iakttagas långt innan den Schrödingerska ekvationen uppställts. Heisenberg redogör i en längre historik för den teoretiska fysikens senaste utveckling och berör blott helt flyktigt sin osäkerhetsrelation.

Debyes föredrag behandla de metoder för bestämning av molekylernas byggnad, vilka icke äro de alldagliga.

Den första föreläsningen behandlar röntgenljusets och katodstrålarnas spridning i gaser. Subtraherar man den intensitetskurva, som erhålles, då röntgenljuset sprides av en enatomig gas, och som bildar en snabbt och kontinuerligt avtagande funktion av avböjningsvinkeln, från den, som erhålles vid spridning i en fleratomig gas, så erhålles ett intensitetsdiagram, som liknar de kända Braggska röntgendiagrammen. På sådant sätt har ingående undersökts molekylstrukturen hos en del organiska klorföreningar, såsom $CCl_4$, $CHCl_3$ ... och $C_6H_4Cl_2$, vilka Debye ägnar särskilt intresse, då deras dipolmoment, ämnet för den andra föreläsningen, är beroende på kloratomens läge i molekylen. Författaren beskriver de olika metoderna för dipolmomentets bestämning, nämligen ur dielektricitetskonstantens ändring med temperaturen enligt Curie, ur bandspektras upplösning i elektriska fält och ur avvikelserna vid bestämning av dielektricitetskonstanten enligt Drude. I anslutning härtill nämner Debye den elektriska motsvarigheten till ferromagneterna, nämligen kristaller med högt dipolmoment, sådana som seignettesalt.

Därefter ingår Debye på de försök, som gjorts för att åstadkomma ljusreflexion mot de molekyler, som påverkas av en ljudvåg, vilken rör sig vinkelrätt mot vätskeytan. Det så reflekterade ljuset innehåller, förutom ljus av den infallande våglängden, även ljus av sådana våglängder, som kunna härröra från en Dopplereffekt.

Slutligen behandlar Debye elektrolyternas struktur. Han utgår därvid från den ståndpunkten, att alla salter, vilka kristallisera i jongitter, i sina lösningar alltid äro till 100 % dissocierade. Den avvikelse härifrån, som den elektrolytiska ledningsförmågan gör trolig, förklarar Debye dels ur jonernas relaxationseffekt, d. v. s. att joner under det elektriska fältets inflytande förändra sin elektriska struktur alldeles som en oledare mellan plattorna i en laddad kondensator, dels ur den elektroforetiska effekten, d. ä. att lösningsmedlet strömmar i riktning mot jonerna.

Författaren till det tredje av ovannämnda arbeten, till yrket kemist i I-G Farbenindustrie, har velat göra den moderna fysikaliska uppfattningen av atomernas byggnad tillgänglig för kemister. Boken är mycket lättläst och innehåller en mängd lustiga vändningar, men också en mängd alltför långa förklaringar. En verkligt god översikt över en del dissociationskonstanters storlek, uttryckt i erg, kgkalorier, elektron-volt och motsvarande frekvens och våglängd, utgör det mest överskådliga kapitlet i boken.

*Sven Arrhenius.*

Geelmuyden-Strömgren, *Lærebog i astronomi.* Gyldendal Norsk forlag. Oslo 1931. 347 sid.

För dem, som studerat astronomi vid något av våra universitet, torde Geelmuydens lärobok vara välbekant. På grund av astronomiens utveckling sedan Geelmuydens död är emellertid boken helt omarbetad av professor Strömgren, Köpenhamn, och docent Bengt Strömgren, vilka båda namn utgöra en fullgod borgen för att innehållet är up to date.

Sin största betydelse för skolan har boken såsom uppslagsbok för astronomiläraren. Exakta och lättförståeliga definitioner på alla astronomiska begrepp, numeriska värden på konstanter enligt senaste bestämningar, beskrivningar på viktigare astronomiska instrument kunna inte inrymmas i de vanliga skolböckerna, men varje lärare kommer då och då i den situation, att han måste ha tillgång till dessa uppgifter, vilka han lätt finner här.

En kortfattad men synnerligen innehållsrik och givande avdelning om stellarastronomi (sid. 275—317) är författad av Bengt

Strömgren. För läraren erbjuder denna säkerligen det största intresset. Mig veterligt finnes för tillfället på nordiskt språk ingen annan så koncis och tillförlitlig redogörelse för stjärnornas beskaffenhet och utveckling och om vår nuvarande uppfattning om universum.

*Algot Jenvall.*

Gösta Setterberg, *Hur skall jag bli styv i matematik.* Natur och Kultur 1934, 156 sid., pris häft. kr. 2: 90, inb. kr. 3: 50.

Boken är avsedd för självstudier i matematik och innehåller noggranna anvisningar för lösning av en hel del ekvationer och ekvationssystem, dessutom avhandlas bokstavsräkning och kvadratrotutdragning, logaritmer, serier och sammansatt ränta, allt belyst av klart och utförligt genomgångna exempel. Då boken inte innehåller några övningsexempel, hänvisas till våra vanliga exempelsamlingar och läroböcker. Boken är medryckande och vederhäftigt skriven och kommer säkert att bli till gagn för många, som på egen hand vilja skaffa sig kunskap i ovanstående frågor. Särskilt torde den vara lämpad för medlemmar i studiecirklar m. fl. Däremot tror anmälaren, att den vid våra läroverk icke kan ha någon större uppgift att fylla vid t. ex. individuella studier, då ju de gängse läroböckerna i allmänhet ge god handledning, och dessutom läraren är villig och skyldig att klara upp det som behövs. Boken innehåller för övrigt långt ifrån hela skolkursen i algebra. För dem som sakna tillgång till personlig handledning bör den emellertid, som sagt, bli till nytta och glädje.

*Erik Kronsjö.*

O. Hassel, *Kristallchemie*, Th. Steinkopff, 1934. 114 sid., bunden RM 10: —.

Kristallkemien, detta endast ett par decennier gamla, men redan mycket omfattande kapitel av den moderna kemien, som har till uppgift att finna sambanden mellan kristallstruktur och kemisk konstitution, har här fått en sammanfattande framställning av stort värde och intresse. Författaren som är docent i Oslo, är välkänd för sina röntgenkristallografiska undersökningar särskilt inom metallamminernas grupp. I föreliggande monografi har han givit en innehållsrik och sakkunnig behandling av detta för kemisten mer och mer oumbärliga kunskapsområde. Vi anföra ur innehållet: Jon- och atomradiernas värden enligt olika forskare (Goldschmidt, Pauling, Zachariasen), De enklaste föreningarnas kristallkemi, Silikatens kristallkemi, Komplexföreningarnas betydelse för kristallkemien, Metalliska och intermetalliska system, Molekylföreningar, Geometrisk bestämning av molekylvikt i fast

form m. fl. Tyvärr måste en kemilärare vid läsningen av detta arbete säga sig, att kristallkemien, som givit så överraskande vackra och belysande förklaringar till ett stort, förut rent empiriskt material av kemiska fakta, och som nu utgör en av kemiens grundvalar, för skolan måste förbli en förseglad bok — även om vi hade tid, vilket vi ej ha, så sakna eleverna de kristallografiska, d. v. s. de stereometriska förutsättningarna. *Gunnar Starck.*

Iwan Bolin och Bror Gustaver: *Kemi för gymnasiet*, Mindre upplagan, Tidens förlag, Stockholm 1934, 322 sid., kr. 6: 50.

Föreliggande lärobok utgör en förkortad upplaga av den lärobok i kemi för gymnasiet av samma författare, som utkom år 1932.

Den senare rönte som bekant ett mycket varmt mottagande, vilket den också i utomordentlig grad var förtjänt utav. Det aktuella innehållet, meddelat på lättläst och välklingande svenska, var i hög grad ägnat att entusiasmera läsaren. Tyvärr synes bokens stora omfång ha i väsentlig mån minskat dess användbarhet, särskilt vid de allmänna läroverken. Då förf. nu villfarit mångas önskan att utge läroboken i förkortad form, är detta steg så mycket mer i sin ordning, som timantalet i kemi på gymnasiet fått vidkännas en verkligt beklaglig reduktion med en timme i det fyraåriga gymnasiets tredje ring. Införandet av laborationer i kemi i ring II, en i och för sig värdefull sak, har dessutom minskat lästiden i denna klass med en halv veckotimme.

Den förkortning av framställningen, som sålunda företagits, motsvarar en reduktion av sidantalet med 100 sidor. Vad som i första hand uteslutits, är de båda kapitlen om titreranalys och fotokemi, som tidigare medtagits med tanke på elevernas enskilda arbete. I övrigt har den gamla kapitelindelningen bibehållits. Meningen är, att de båda upplagorna skola kunna användas vid sidan av varandra, den större av mera försigkomna och intresserade elever. Många av mina egna elever ha med gott utbyte studerat den större uppl. vid sidan av den ordinarie läroboken. Särskilt är den lämpad för dem, som ämna komplettera.

Första kapitlet av den nya boken inrymmer korta översikter, dels över den kemiska vetenskapens olika tidsskeden, dels över jordens sammansättning och metalltillgångar. Det anbefalles i likhet med de korta historiska notiser med petitstil, som föregå varje kapitel, till kursivläsning. Att se framstegen inom teoretisk och praktisk kemi i deras rätta historiska sammanhang verkar i hög grad befordrande på kunskaperna. De små notiserna hålla läsaren à jour med utvecklingens gång.

Metalloidernas kemi behandlas numera på sammanlagt 60 sidor. Åtskilligt har utelämnats, såsom hydrazin och kvävevätesyra, cyansyra och knallsyra, kisels väteföreningar m. m. Gången i framställningen avviker, som förut nämnts, från den gängse. De gasformiga grundämnena i luften, vatten och väte, bor, kol och kisel, fosfor, svavel, selen och tellur samt halogenerna behandlas i nu nämnd ordning. Annars har det av gammalt varit sed att börja med väte, syre och halogenerna och först senare genomgå svavel och kväve, emedan dessa på grund av sin skiftande valens erbjuda något mer komplicerade förhållanden.

Behandlingen av metallernas kemi, numera omfattande 94 sidor, har också blivit föremål för vissa begränsningar. Den gängse principen att behandla lätta metaller före tunga och väteutdrivande före icke-väteutdrivande har ersatts med det periodiska systemets gruppindelning. Sammanfattningarna efter de olika grupperna ha tryckts med petitstil och äro avsedda att läsas först vid repetitionen i högsta ringen. Vissa andra moment, såsom de som behandla fotokemiska reproduktionsmetoder, rött blodlutsalts användning till framställning av blåkopior, om järnets legeringar m. m. ha tryckts med petitstil för att markera, att de icke ingå i den egentliga kursen. Ett moment om metallografi har fullständigt strukits.

Om pottaska framhålles, att det framställes enligt samma metoder som soda. Om man får tro andra läroböcker, skulle emellertid Solvays metod slå slint, då kaliumbikarbonatet ej är svårlösligt i samma grad som motsvarande natriumsalt. Den reaktion, som inträder, när ammoniumbikromat upphettas, skulle förlöpa enligt formeln:

$$(NH_4)_2\ Cr_2O_7 = Cr_2O_3 + N_2 + 4H_2O.$$

Att detta ej är det enda sätt på vilket nämnda salt kan sönderfalla framgår därav, att ammoniak lätt kan påvisas bland de bortgående gaserna.

Kapitel 21 om kolföreningarnas kemi omfattar 55 sidor. Behandlingen av de cykliska föreningarna har något beskurits.

De väsentligaste avkortningarna ha företagits i de kapitel, som behandla allmän och fysikalisk kemi, och här var en beskärning också framför allt av nöden. Dessa kap. omfatta ännu 96 sidor. För elever med svagare matematisk inställning har den teoretiska kemien alltid varit en stötesten. Om studiet av densamma drives för ensidigt, kan det t. o. m. döda det intresse för ämnet, som vi lyckligtvis ha att räkna med hos det uppväxande släktet. Här få vi emellertid detta kursmoment serverat i så pass lättsmält form, att det i stället bör reta aptiten.

Kapitel 5 behandlar de tidigare föreställningarna om atomer och molekyler, Avogadros princip, gastäthet och termisk dissociation. Kapitel 7 om lösningar och kolloider har starkt förkortats, men framställningen är ännu ganska brett lagd. Kapitel 9 om elektrolyter är också utförligt. I kapitel 11 behandlas periodiska systemet, grundämnenas elektrokemiska karaktär, metallernas elektrolytiska spänningskedja, galvaniska element, några tillämpningar på spänningserien, översikt över framställning av metaller, baser, syror och salter och den kemiska nomenklaturen. Kapitel 22 om reaktionslära behandlar jämviktstillståndet vid kemiska reaktioner, massverkans lag, jämviktsförskjutning genom ändring av massan, volymen, trycket och temperaturen med tillämpning på homogena och heterogena system, begreppet löslighetsprodukt m. m. och omfattar 22 sidor. Det tillhör de mera innehållsrika. Kapitel 23 om radioaktivitet och kapitel 24 om den moderna atomteorien äro mycket måttfullt skrivna. Sista kapitlet ägnas åt några satser ur den teoretiska kemien, såsom valet av atomvikt bland föreningsvikterna, om molekylarviktsbestämning för gaser samt van't Hoffs lag för utspädda lösningar. Till sist följer en atomviktstabell samt uppgifter å litteratur för enskilt arbete. Bildmaterialet och exemplen äro ungefär desamma som förut.

Såsom torde framgå av vad ovan framhållits, har den beskrivande kemien behandlats på ett sätt, som tillfredsställer alla rimliga krav på koncentration. Åt den allmänna och fysikaliska kemien har ägnats ett proportionsvis stort sidantal, men detta har tydligen skett i syfte att åstadkomma en lättillgänglig framställning, ej för att öka kunskapsstoffets omfattning. Författarna ha sålunda lyckats väl i att med bibehållande av bokens många tidigare förtjänster minska dess omfång. De äro dessutom värda en eloge därför att de ej låtit sig av den myckna lärdomen förledas till en alltför teoretisk ton, som lätt förtar de intresseväckande poängerna. Till slut äro våra gymnasister att gratulera till en »rolig» och lättläst kemibok.

*Samuel Hennichs.*

*Dædalus*, Tekniska Museets årsbok 1934. Ingenjörsvetenskapsakademien, Stockholm, 130 sid.

Innehåll och utstyrsel äro liksom i tidigare årsböcker synnerligen förnämliga. Jämte illustrerade notiser om museets nyförvärv m. m. förekomma flera intressanta uppsatser: A. Bæckström, Arbets- och disciplinförhållanden vid Rörstrands porslinsfabrik under 1700-talet; W. Weibull, Alexander Lagermans livsgärning; Gurli Linder, S. A. Andreé; E. Stoltz, De skandinaviska alunbruken.

## Gradualavhandlingar.[1]

Holger Erdtman, *Studies on the Formation of Complex Oxidation and Condensation Products of Phenols. A Contribution to the Investigation of the Origin and Nature of Humic Acid. Proceedings of the Royal Society*, London, 1933, 64 sid. Disp. vid Stockholms Högskola 3 febr. 1934. Opponenter: professor Bror Holmberg och fil. dr. Hans Bäckström.

De i jord, torv, brunkol m. m. ingående mörkfärgade huminämnena äro ännu trots deras ymniga förekomst och stora betydelse i naturens hushållning till sin kemiska natur nästan fullständigt outredda. Problemet är också oerhört svårlöst. Vi veta nämligen ännu icke med bestämdhet ur vilka ämnesgrupper huminsyrorna framgå; förmodligen utgör lignin en modersubstans, men även ligninets kemiska struktur är höljd i dunkel. Säkert ingå emellertid oxidationsprodukter av fenoliska ämnen (t. ex. garvsyror) i de naturligt förekommande humussubstanserna. Var och en vet att fenoler, såsom pyrogallol, hydrokinon och pyrokatekin, i alkalisk lösning absorbera syre under mörkfärgning, och att syror ur dessa lösningar fälla amorfa, brunfärgade flockar. Dessa »fenolhuminsyror» visa en påtaglig både fysisk och kemisk likhet med de naturliga huminsyrorna, och en nära kemisk släktskap mellan dessa grupper är sannolik. Utforskandet av fenolhuminsyrornas struktur underlättas därav, att utgångsmaterialet är känt, och fenolhuminsyrepreparaten kunna därför antagas vara enhetligare än de naturliga huminsyrorna.

Det första stadiet i de polyhydriska fenolernas oxidation utgöres av kinoner, och den första delen av den föreliggande avhandlingen behandlar ett allmänt studium av enkla monocykliska kinoners reaktivitet. Ett stort antal alkyl- och alkoxylsubstituerade kinoner ha undersökts med avseende på additions-reaktioner, och positionen av deras reaktiva kolatomer och den relativa reaktiviteten hos dessa har bestämts. Genom dessa arbeten har grunden lagts till ett mera kvantitativt studium av orienteringsförhållandena inom kinongruppen, vilka i mer än ett avseende skilja sig från dem vi känna från aromatiska system.

Den andra delen av avhandlingen behandlar fenolers resp. kinoners koppling med varandra varigenom difenylderivat bildas. Pyrogallol oxideras i natriumhydroxidlösning av syre direkt till »pyrogallolhuminsyra», men i barytlösning kan en mellanprodukt

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

avfångas på grund av utfällning av dess olösliga bariumsalt. Denna mellanprodukt är 2, 3, 4, 2′, 3′, 4′-hexaoxidifenyl (vic. dipyrogallol). På liknande sätt kopplas oxihydrokinon, metoxihydrokinon, toluhydrokinon, pyrokatekin, hydrokinon m. fl. fenoler till difenylderivat. Intermediärt bildas vid dessa fenolers oxidation kinoner, vilka förmedla kopplingen i positioner och med relativa hastigheter, som bestämmas av de i den första delen behandlade lagbundenheterna. Difenylderivaten ha oxiderats till motsvarande dikinoner, vilkas reaktivitet undersökts för att därmed utröna vilka positioner, som kunna antas förmedla vidare koppling till de högmolekylära fenolhuminsyrorna.

Den tredje delen av avhandlingen omfattar ett studium av en ny typ av intramolekylär omlagring, som iakttagits i dikinonserien. Dikinonerna bestå av två sammanlänkade, starkt reaktiva kinoida system; vid uppvärmning till cirka 210° reagera (hos 4,4′-dimetoxi- och 4,4′-dimetyldikinon) dessa system med varandra under bildning av difenylenoxidderivat. Den ena kinongruppens karbonylsyre griper in i den andra kinongruppens kärna, som utsänder en proton, vilken upptages av den förra kinongruppens återstående karbonylsyreatom och vilken därmed bildar en hydroxylgrupp. Reaktionen är således att uppfatta som en intramolekylär oxido-reduktion.

Den fjärde delen av avhandlingen behandlar koppling av kinoner till terfenylderivat, vilka stabiliserats genom anhydridisering och därigenom undandragits ytterligare koppling till polymerisationsprodukter av ännu högre molekylarvikt. Sålunda ger kinon vid behandling med svavelsyra en lineär dioxitrifenylendioxid, tolukinon ger en angulärt byggd dioxitritolylendioxid och α-naftokinon en angulär dioxitrinaftylendioxid. Den senare substansen bildas tillsammans med dess dehydrerings- och anhydridiseringsprodukt nämligen trinaftobenzoltrioxid, ett tioringat system bestående av en central benzolkärna med tre symmetriskt anslutna naftalinkärnor mellan vilka syrebyggor äro spända så att tre furansystem bildas. Den centrala bezolkärnan är således helt omgiven av ringar. Samtliga dessa substanser representera nya heterocykliska ringsystem.

Sammanfattning: Vid fenolers oxidation till fenolhuminsyror sammankopplas fenolkärnorna med varandra varigenom slutligen högmolekylära polyfenoler bildas, vilka dehydreras till oxikinoner. Fenolhuminsyrorna utgöra således polymera oxikinoner, en slutsats, som på ett utmärkt sätt står i överensstämmelse med deras egenskaper t. ex. färg, aciditet, reducerbarhet, termolabilitet och anhydridiserbarhet.

HANNES ALFVÉN, Investigations on the ultra-short electro-magnetic waves. Disp. i Uppsala den 25 april 1934. Opponenter: docent ERIK BÄCKLIN och fil. kand. PER OHLIN.

Sedan lång tid tillbaka känner man väl till dämpade elektromagnetiska svängningar med våglängder ned till en bråkdel av en mm. Då emellertid de dämpade vågorna ha så stora nackdelar att de äro oanvändbara för många såväl vetenskapliga som tekniska uppgifter, är det av största vikt att kunna generera odämpade svängningar.

Med hjälp av elektronrör kan man ju numera i en vanlig radiosändare alstra odämpade vågor med effekter på hundratals kilowatt. Detta gäller dock endast för jämförelsevis långa våglängder. Med elektronrör i vanlig sändarekoppling kommer man icke under 1 à 2 meter.

För 15 år sedan upptäckte BARKHAUSEN och KURZ av en tillfällighet en metod att alstra odämpade vågor med ännu kortare våglängd. De funno nämligen, att om man kopplar ett elektronrör »bakvänt», d. v. s. lägger en hög positiv spänning (t. ex. 100 volt) på gallret och en svagt negativ spänning på anoden, så alstrar röret under vissa omständigheter en svängning med en mycket kort våglängd ($< 1$ m).[1] Röret bör helst ha cylindrisk elektrodanordning och vara av högtemperaturtyp.

I ett rör kopplat på nyssnämnda sätt accelererar den höga gallerspänningen de elektroner, som glödtråden emitterar. En del av dem träffar gallret, men de flesta passera dess maskor på väg mot anoden. Då denna är negativ (benämningen anod är alltså inte fullt korrekt!) nå de den aldrig, utan vända tillbaka och pendla kring gallret, tills de slutligen fastna på detta.

Vid de första försöken visade det sig, att den genererade svängningens våglängd är praktiskt taget oberoende av de självinduktioner och kapaciteter, som anslutas till röret. Däremot beror den av de pålagda spänningarna och rördimensionerna. Med kännedom om dessa kan man beräkna den frekvens, med vilken elektronerna pendla kring rörets galler, och det visar sig, att den genererade svängningens frekvens är ungefär lika stor, ehuru överensstämmelsen i allmänhet är ganska dålig. (Man har även funnit svängningar med approximativt den dubbla, tredubbla, fyrdubbla, etc., frekvensen.)

Flera forskare ha undersökt fenomenen experimentellt och teoretiskt, och flera hundra arbeten ha publicerats i ämnet. Så

[1] Vid senare experiment har man kunnat generera våglängder mindre än 5 cm.

ha Gill och Morrell påvisat, att man under vissa förhållanden får en svängning, vars våglängd är i det närmaste oberoende av de pålagda spänningarna, men däremot beroende av den svängningskrets, i vilken röret ingår. Då dessa rön stå i motsats mot de nyss nämnda, anse många, att »Barkhausen-Kurz-svängningarna» och »Gill-Morrell-svängningarna» äro två helt skilda fenomen.

Experimenten ha vidare visat, att ett rör genererar svängningar endast inom vissa »svängningsområden», d. v. s. om galler- och anodspänningarna ha vissa bestämda värden. Ett flertal andra intressanta fenomen ha påvisats, men ofta äro de olika författarnas resultat tämligen motsägelsefulla.

Avhandlingen ifråga angriper problemen med en ny experimentell metod som gör det möjligt att överblicka, vilka frekvenser elektronpendlingen i röret kan giva upphov till. Dessutom beräknas teoretiskt den växelverkan, som äger rum mellan den elektromagnetiska svängningen i kretsen och elektronrörelsen i röret, och resultaten stå i god överensstämmelse med experimenten. Av en vidare utveckling av teorien framgår, att den är i stånd att förklara ett flertal av de observerade fenomenen. Särskilt viktigt är, att man kan teoretiskt beräkna de förut omtalade svängningsområdena. Slutligen påvisas, att »Barkhausen-Kurz-svängningarna» och »Gill-Morrell-svängningarna» i grunden äro samma fenomen, som alltefter de olika sätt, varpå experimenten anordnas, kan gestalta sig olika.

## Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

### Lokalavdelning bildad i Lund.

För att ge medlemmarna i Fysiska föreningen, Kemiska föreningen och Lunds Matematiska sällskap en inblick i 1933 års läroverksstadga höllo nämnda föreningar ett gemensamt sammanträde på Fysiska institutionen i Lund den 4 dec. 1933, varvid föredrag hölls av rektor P. G. Persson, Ystad, över ämnet »Matematiken och naturvetenskaperna vid de allmänna läroverken». Härvid lämnades en jämförande översikt av de senaste 30 årens skolreformer och deras verkan på undervisningen i matematik, fysik, kemi och biologi (ref. i Lunds Dagblad $^{9}/_{12}$ 1933). Efter föredraget följde en livlig diskussion, varvid bl. a. framfördes ett förslag om bildande i Lund av en sydsvensk lokalavdelning av

den tidigare under hösten i Stockholm bildade, hela Sverige omfattande »Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning». Diskussionen resulterade i att en kommitté — prof. K. Lundmark, rektor S. Sjöberg, amanuens B. Svensson — tillsattes för att undersöka intresset och möjligheterna för en dylik förenings bildande. Ett till universitetet i Lund och till skolor i sydligaste Sverige utsänt cirkulär härom fick ett mycket gynnsamt mottagande, varför kommitterade kallade till konstituerande sammanträda i Lund den 10 mars innevarande år. Inledaren, prof. K. Lundmark, redogjorde för huvudföreningens arbete och betonade, att den i Lund åsyftade avdelningen speciellt skulle på sitt program upptaga pedagogiska frågor. Därefter beslöt man enhälligt att bilda en dylik lokalförening. Styrelsen fick följande sammansättning: rektor P. G. Persson, Ystad (ordf.); lektor G. Hössjer, Malmö (v. ordf.); amanuens B. Svensson, Lund (sekr. o. kassör); fil. lic. H. Nordström, Lund (v. sekr.); hamndirektör G. Edlund, Malmö; rektor E. Hernqvist, Halmstad; lektor A. Jönsson, Malmö; prof. J. Koch, Lund; fil. dr. A. Leide, Lund; prof. K. Lundmark, Lund; rektor F. Montén, Malmö; rektor K. Parck, Eslöv; prof. M. Riesz, Lund; rektor S. Sjöberg, Lund; prof. L. Smith, Lund; lektor B. Svensson, Lund. Arbetsutskott: prof. J. Koch, amanuens B. Svensson, lektor G. Hössjer.

Vid sammanträdet hölls därefter föredrag av lektor G. Hössjer över ämnet »Rötter, potenser och logaritmer på gymnasiet», varvid redogjordes för ett sätt att framställa detta kapitel, vilket föredragshållaren med god framgång praktiserat vid Högre allm. lärov. för flickor i Malmö (se denna tidskr. årg. 15, sid. 140). — Amanuens B. Svensson visade härefter några fysikaliska demonstrationsförsök: Poissons konstant (elasticitetsläran); längdutvidgningskoeff.; resonansrör för stående akustiska svängningar.

Sitt andra sammanträde höll föreningen den 21 april, då föredrag höllos, av rektor K. Parck över »Kemilaborationer vid gymnasieundervisningen», av prof. L. Smith om »Kursen i kemiska undervisningsexperiment vid universitet» och av adjunkt G. Thölin om »Enskilt arbete i kemi».

Lokalavdelningen omfattar nu omkring 130 medlemmar och intresset är mycket stort. Till hösten planeras ett sammanträde i Lund på ett par dagar med olika föredragsserier, speciellt i fysik med demonstrationer. Härigenom vill lokalavdelningen söka bidraga till ett intimare samarbete mellan universitet och skola.

*Börje Svensson.*

## En gåva.

En person som tidigare bidragit till de pris, vilka utdelats vid tidskriftens pristävlingar (se Dec.-häftet 1933, sid. 269), har i år — då någon dylik tävlan ej anordnats — på så sätt önskat uppmuntra elever med intresse för matematik, fysik och kemi, att han lovat bestrida kostnaderna för utsändandet av ett ex. av Tidskrift för elementär matematik etc. årg. 1934 till en elev vid vart och ett av rikets högre läroverk (allm. och tekniska läroverk, kommunala och privata gymnasier med reallinje, folkskoleseminarier). Rektor och vederbörande huvudlärare skulle ombedjas föreslå en elev vid varje läroverk, förtjänt av denna uppmuntran. I enlighet med inkomna förslag utsändes tidskriften under innevarande år till 86 elever vid ovannämnda läroanstalter enligt nedanstående förteckning.

De elever, vilka på så sätt under året få mottaga tidskriften, ombedjas vänligen meddela expeditionen eventuella adressförändringar och att vid årets slut insända ett erkännande av att de under året mottagit tidskriften.

Till givaren framföres såväl mottagarnas som redaktionens vördsamma tack.

*Högre allmänna läroverk:* Nils Lundgren, Borås; Arne Larsson, Eksjö; Göran Lindblad, Eskilstuna; Sven Malmström, Falun; Rune Larsson, Gävle; Bengt Peters, Göteborg (latinl.); Bengt Jakobsson, Göteborg (reall.); Brita Nordblom, Göteborg (flickl.); Per Gösta Perby, Halmstad; Folke Smedmark, Hudiksvall; Per Sylvan, Hälsingborg (gossl.); Asta Nord, Hälsingborg (flickl.); Herman Sundvall, Härnösand; Ove Norell, Jönköping; Börje Torudd, Kalmar; Erik Pettersson, Karlskrona; Bror Rexed, Karlstad; Josef Nyström. Kristianstad; Sten Erik Mörtstedt, Kristinehamn; Nils Sörensson, Landskrona; Stig Sunner, Linköping; Karl-Gustaf Hjerpe, Luleå; Per Wessner. Lund; John Ekström, Malmö (gossl.); Hervor Bernow, Malmö (flickl.); Knut Wiechel, Norrköping; Brita Hessner, Nyköping; Ingvar Wilson, Skara; Ulf Hellsten, Skövde; i Stockholm: Torsten Eklund, Norra latinl.; Anders Runqvist, hal å Södermalm; Sven Johansson, Nya elem.; Birger Holmer, reall. å Norrmalm; Richard Westöö, hal å Östermalm; Torsten Jensfelt, hal å Kungsholmen; Ann-Marie Thorn, flickl.; Sven Lenander, Strängnäs; Gösta Wiklander, Sundsvall; Stig Rasjö, Södertälje; Markus Strannberg, Uddevalla; Birger Ludvigson, Umeå; Per-Olov Löwdin, Uppsala; Bengt Eklund, Visby; Erik Malmqvist, Vänersborg; Arne Edsbäcker, Västervik; Olle Käll-

BÄCK, Västerås; CARL ERIK FRÖBERG, Växjö; ALLAN MÅNSSON, Ystad; GÖSTA BROGREN, Örebro; TORSTEN FAXÉN, Östersund.

*Kommunala och privata läroverk:* ERIK-GUSTAF HOLMBLAD, Djursholm; GÖSTA WENNERSTEN, Eslöv; LARS SÖDERHJELM, Göteborgs högre samskola; BERTIL EHN, Lidingö; ÅKE HJERTSTRAND, Lunds priv. elem.skola; GÖSTA NORLANDER, Lundsberg; ANDERS LARSON, Motala; ROLF PAULI, Saltsjöbaden; CARL-AXEL LUNDSTRÖM, Sigtunaskolan; i Stockholm: ANNA STINA GJÖRLING, Anna Ahlströms skola; BENGT FRIES, Almquistska samskolan; KARL GUSTAV TOLL, Beskowska skolan; SVEN GUNNAR LINDBLOM, Palmgrenska samskolan; SUNE DAHLÉN, Whitlockska samskolan; GUNHILD AULIN, Åhlinska skolan; SVEN ALEXANDERSSON, Söderhamn; MATS ERONN, Uppsala ensk. lärov. o. priv.gymn.

*Tekniska läroverk:* GÖRAN CARLSON, Borås; VILHELM ALMROTH, Härnösand; LENNART HÄRENSTAM, Malmö; IVAR PAULSSON, Norrköping; BIRGER ANDERSSON, Örebro.

*Högre lärarinneseminariet i Stockholm:* VALBORG JÄRNER.

*Folkskoleminarier:* INGRID HELLSTEN, Falun; JOHN JANSSON, Göteborg; ERIK LINDBLAD, Härnösand; ADA KARLSSON, Kalmar; NILS OLSSON, Karlstad; MARTA LINDSTRÖM, Landskrona; GUSTAF SVENSSON, Linköping; KARL GUSTAVSSON, Luleå; GUNNAR GRAHN, Lund; BIRGIT DAHLSTRÖM, Stockholm; INGEBORG SUNDAHL, Umeå; GUNNAR ÅHSLUND, Uppsala; ALLAN BERGGREN, Växjö. *Red.*

## Åttonde skandinaviska matematikerkongressen.

Representanter för de matematiska vetenskaperna vid Sveriges universitet och högskolor ha genom prof. E. PHRAGMÉN inbjudit Danmarks, Finlands, Norges och Sveriges matematiker till avhållande av en kongress i Stockholm den 14—18 augusti 1934. Den första av dessa skandinaviska kongresser hölls i Stockholm 1909; senare ha två hållits i Köpenhamn, två i Oslo, en i Stockholm och en i Helsingfors. Kongressen i år blir alltså den åttonde. Vid denna kommer liksom vid de förra att till behandling upptagas ämnen inom såväl den rena som den tillämpade matematiken.

Anmälan om deltagande bör ske till kongressens sekr. fil. lic. W. ODHNOFF under adr. *Åttonde Skandinaviska Matematikerkongressens Sekreteriat, Stockholm 2.* Från sekr. kunna närmare upplysningar om kongressen erhållas. Deltagareavgiften — som även berättigar till erhållande av ett exemplar av de tryckta förhandlingarna — är 15 kr. Familjemedlem, som önskar närvara, erlägger en avgift av 10 kr.

# Föredrag under våren 1934 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

*Lund:*

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. F. Berglund; förman i arbetsutskottet fil. kand. N. E. Fremberg.

Föredrag: fil. mag. Hugo Björck, Algebraiska och transcendenta tal (28/2); fil. lic. Victor Bergström, Några limesbegrepp (22/3).

Fysiska Föreningen, ordf. docent O. Lundquist, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: fil. dr. Arvid Leide, Den positiva elektronen (21/2); prof. August Upmark, Till frågan om vätets isotopi och det tunga vattnets molekyl (21/2); prof. E. Tegen, Indeterminismen i den moderna fysiken med särskild hänsyn till Heisenbergs osäkerhetsprincip (7/3); amanuens Börje Svensson, Nyare undersökningar över metallmagnetism (4/5).

Kemiska Föreningen, ordf. prof. L. Smith, sekr. amanuens E. Eftring.

Föredrag: fil. lic. E. Schjånberg, Några termokemiska och optiska undersökningar över klorsubstituerade estrar (26/1); prof. L. Smith, Principerna för den första undervisningen i organisk syntes (28/2); doc. E. Larsson, Om utsaltning (28/2); dr. ing. A. af Ekenstam, Studier över cellulosamolekylens storlek och byggnad (28/3); fil. mag. G. Holst, Undersökningar över oxidations-reduktionspotentialen i ett reaktionströgt system (27/4); fil. kand. G. Sjöström, Malmanrikning genom flotation (27/4).

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning, lokalavdelning i Lund, ordf. rektor P. G. Persson, Malmö, sekr. amanuens B. Svensson.

Föredrag: Se sid. 113.

*Stockholm:*

Matematiska Sällskapet, ordf. doc. S. Wigert, sekr. fil. lic. W. Odhnoff.

Föredrag: fil. lic. S. Danielsson, Något om koefficientproblemet för univalenta funktioner (1/3); docent S. Wigert, Om differentialekvationer, som kunna integreras efter derivation (13/4): fil. kand. Åke Pleijel, Ett problem ur potentialteorien (14/5).

Svenska Fysikersamfundet, ordf. prof. M. Siegbahn, sekr. ingenjör C. H. Johansson,

Föredrag: Visning av »Institutet för högspänningsforskning» i Uppsala under ledning av prof. H. Norinder med föredrag om institutets tillkomst, arbetsuppgifter och utrustning (26/5).

(Forts. sid. 128.)

# Problemavdelning.[1]

## Matematiska uppgifter.

672) *I en likbent triangel är basen av konstant längd och dess mittpunkt O fix. Triangelns motstående vinkelspets är belägen på en fix, rät linje. Sök orten för den inskrivna cirkelns medelpunkt, när basen vrider sig kring O.* *X.*

673) *Mellan vilka gränser ligger* $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, *om A, B och C äro en triangels vinklar? Kan man med kännedom om värdet på summan avgöra, huruvida triangeln är spets-, rät- eller trubbvinklig?* *X.*

674) *Lös ekv.-syst.*

$$\left.\begin{aligned} x^2 - yz &= a \\ y^2 - xz &= b \\ z^2 - xy &= c \end{aligned}\right\}.$$

## Enklare matematiska uppgifter.[2]

675) En triangels sidor betecknas med $a$, $b$ och $c$. Visa, att triangeln är rätvinklig, om $(a^4 + b^4 + c^4)^2 = 2(a^8 + b^8 + c^8)$.

676) Ekvationen $x^2 + x + 2 = 0$ har rötterna $x_1$ och $x_2$; ekvationen $y^2 - 3y + 1 = 0$ har rötterna $y_1$ och $y_2$. Bilda (utan att lösa dessa ekv.) den ekv., som har rötterna $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$ och $x_2 y_2$.

Svar: $x^4 + 3x^3 + 15x^2 + 6x + 4 = 0$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. nr. 675—677 och 680 äro insända av *X.*, uppg. nr. 678, 679, 681—686 av *S. B.*

677) Visa, att divisionen $\frac{9(3x-1)^4-7(3x-1)^2+1}{9x^2-7x+1}$ går jämnt upp utan att utföra densamma.

678) En cirkel med centrum på sidan $AB$ i en triangel $ABC$ tangerar sidorna $AC$ och $BC$. Visa, om cirkelns radie $= r$, att

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sin C}{r}.$$

679) I en triangel med sidorna 13 cm, 14 cm och 15 cm förenas de vidskrivna cirklarnas medelpunkter. Beräkna ytan av den så erhållna triangeln.

Svar: 341,25 cm$^2$.

680) I en tetraeder äro fem av kantlinjerna $= a$ och den återstående $= \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$. Beräkna tangenten för kantvinkeln längs den kortare kantlinjen.

Svar: 2.

681) Från en punkt $P$ på linjen $x+y=1$ fällas normalerna $PA$ och $PB$ mot linjerna $2x-y=3$ och $x+2y=4$. Angiv minimivärdet på sträckan $AB$.

Svar: $\sqrt{2}$.

682) Koordinaterna för en punkt, belägen inuti en cirkel med centrum i origo, äro $(a; b)$. Bestäm ekvationen för den genom $(a; b)$ gående räta linje, som skär cirkeln under minsta möjliga vinkel.

Svar: $ax+by=a^2+b^2$.

683) Från punkten $(a; 0)$ lägges en tangent till kurvan $y=bx^n$. Angiv tangeringspunktens abskissa.

Svar: $an:(n-1)$.

684) En triangels sidor äro $AB=10$ cm; $BC=13$ cm och $CA=9$ cm. På $AB$ och $BC$ äro tagna punkterna $D$ och $E$ resp. så, att $DE$ delar triangelytan mitt itu. Angiv minimivärdet på sträckan $DE$.

Svar: 6 cm.

685) $A$ och $B$ äro punkter på $x$-axelns positiva del. Från punkterna $(0; a)$ och $(0; b)$ synes sträckan $AB$ under vinkeln $\alpha$. Visa, att $AB=(a+b)\,tg\alpha$.

686) En vid $A$ rätvinklig triangel $ABC$ har hörnet $A$ fast i punkten $(a; b)$. Hörnet $B$ glider utefter $x$-axeln, $C$ utefter $y$-axeln. Sök orten för triangelns tyngdpunkt.

Svar: Räta linjen $3ax + 3by = 2a^2 + 2b^2$.

## Lösningar till uppg. 633—635.

633) *$F$ är den ena brännpunkten i en given ellips; $P$ är en annan given punkt. Sök enveloppen för den variabla ellips, som går genom $F$, har sin ena brännpunkt i $P$ och den andra på den givna ellipsen.* *X.*

Om den givna ellipsens ($E_1$) andra fokus är $G$ och storaxel $2a$, så är den sökta enveloppen den ellips $E_2$, som har foci i $P$ och $G$ samt storaxeln $2a + FP$. Två ellipser med gemensam brännpunkt ha högst två reella skärningspunkter. Två rörliga ellipser tillhörande vår familj ha alltså utom $F$ *en* reell skärningspunkt. Det är denna skärningspunkt, som närmar sig enveloppen, då två rörliga ellipser tendera att sammanfalla. Det gäller sålunda att visa, att varje sådan ellips tangerar $E_2$.

1. Ellipsen $E_2$ tangerar $E_1$ i punkten $T$, som ligger *på förlängningen av $PF$ över $F$*. Detta följer ur likheten $GT + TP = GT + TF + FP = 2a + FP$ och satsen om ellipstangentens läge i förhållande till fokalradierna till kontaktpunkten.

2. För övrigt ligger $E_2$ helt och hållet utanför $E_1$. Antag nämligen, att $B$ vore en punkt på $E_2$, men innanför eller på $E_1$. Då fås $GB + BF \leqq 2a$ och $2a + FP = GB + BP$. Efter addition ledvis fås $BF + FP \leqq BP$, som är orimligt.

3. Tag nu en godtycklig punkt $A \neq T$ på $E_2$. På $GA$ ligger då en punkt $Q$ på $E_1$. Det inses nu, att $P$ och $Q$ äro foci i en ellips av vår familj och att den tangerar $E_2$ i $A$. Man har nämligen $GA + AP = GQ + QA + AP$ och $GA + AP = 2a + FP = GQ + QF + FP$, varav $QA + AP = QF + FP$, vilket bevisar påståendets första del. Riktigheten av den senare är evident. *X.*

634) *Att genom en triangels ena vinkelspets draga en rät linje så, att om perpendiklar från de övriga hörnen fällas mot den sökta linjen de så uppkomna rätvinkliga trianglarna bliva likytiga.* *X.*

$O$ är det hörn, genom vilket de sökta linjerna gå, $A$ och $B$ de övriga. Uppgiften går ut på att konstruera asymptoterna till ett

par liksidiga hyperblar, som innehålla $A$ och $B$. Ekv. för ett par sådana hyperblar är nämligen $xy = \pm K$, om asymptoterna äro axlar.

I. Om $A$ och $B$ ligga på *samma* hyperbelgren, uppritas en cirkel med centrum $M$ i $AB$:s mittpunkt och radien $= OM$. Om cirkeln skär $AB$ i $P$ och $Q$, bli enligt en känd sats $OP$ och $OQ$ lösningar.

II. Om $A$ och $B$ ligga på *var sin* hyperbelgren, kunde konstruktionen fullföljas som i I, om man kände den punkt $M$, i vilken den till kordriktningen $AB$ hörande diametern (som är densamma för båda hyperblarna och asymptotparet) skär $AB$. Med $OM$ och dess konjugatdiameter som axlar ha hyperblarna ekv. $x^2 - y^2 = \pm L$. Punkten $M$ är sålunda bestämd av villkoret $\overline{OM}^2 - \overline{MA}^2 = -(\overline{OM}^2 - \overline{MB}^2)$ eller $2\,\overline{OM}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$. Konstruktionen blir nu följande: Spegelbilden av $O$ i $AB$ är $O_1$. Mittpunktsnormalerna till $OA$ och $O_1B$ råkas i $X$. Normalen $XM$ mot $AB$ utskär $M$.

Bevis: Orten för en punkt $Y$, som uppfyller villkoret $\overline{OY}^2 + \overline{O_1Y}^2 = \overline{YA}^2 + \overline{YB}^2$ visas lätt vara en rät linje $\perp AB$. $X$ tillhör orten, ty $OX = XA$ och $O_1X = XB$. ∴ tillhör $M$ orten, och då $OM = O_1M$, blir $2\,\overline{OM}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$.

Anm. Samband mellan fallen I och II fås, om konstr. I varieras: Mittpunktsnormalerna till $OA$ och $OB$ råkas i $Z$. Normalen $ZM$ mot $AB$ utskär $M$. *X.*

635) *Inuti en regelbunden tetraeder är vald en punkt, vars avstånd till sidoytorna förhålla sig som 1 : 3 : 4 : 8. Beräkna punktens avstånd till tetraederns medelpunkt.* *S. B.*

Om avstånden till sidoytorna betecknas med $x$, $3x$, $4x$ och $8x$, höjden med $h$ samt en sidoyta med $B$, erhålles ekv.

$$\frac{x \cdot B}{3} + \frac{3x \cdot B}{3} + \frac{4x \cdot B}{3} + \frac{8x \cdot B}{3} = \frac{Bh}{3}, \quad \text{varav } 4x = \frac{h}{4}.$$

Lägges alltså genom tetraederns medelpunkt ett plan parallellt med en sidoyta, befinner sig den sökta punkten inuti den liksidiga triangel, planet utskär. Avstånden till sidorna stå till varandra i förh. 1 : 3 : 8. I ett axelsystem med origo i triangelns tyngdpunkt och $x$-axeln utmed en höjd $(= h_1)$ befinnas koordinaterna vara $x = \frac{h_1}{3}$ och $y = \frac{h_1}{12} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$. Det sökta avståndet blir $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{h_1\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}$, där $h_1 = \frac{3a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($a =$ kantlinjen). Svaret alltså $\frac{a\sqrt{13}}{16}$.

*S. B.*

# Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna V. T. 1934.

## Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Summan av två tal är 10, summan av deras inverterade värden är också 10. Sök de båda talen och beräkna förhållandet mellan dem.
2. En person hade i testamente förordnat, att vid årsskiftet närmast efter hans död 15 000 kronor skulle avsättas till en stipendiefond, varifrån utdelning finge ske först 30 år därefter och då med hela den årliga avkastningen. Hur stor kan den årliga utdelningen bliva, om årsräntan, som beräknas efter $3\,1/2\,\%$, innan stipendieutdelningen började kapitaliserades vid varje års slut?
3. Beräkna med logaritmer

$$\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} - \sqrt[6]{2}}.$$

4. I triangeln $ABC$ är vinkeln $A = 60°$, sidan $AB = 8$ cm och triangelns omkrets $= 18$ cm. Beräkna triangelns okända sidor och vinklar.
5. I en rätvinklig triangel är en vinkel 30°. Beräkna vinkeln mellan medianerna mot kateterna.
6. En cirkel med 4 dm:s radie är given. Från en punkt, som ligger på 6 dm:s avstånd från medelpunkten, drages en sekant, vars utanför cirkeln belägna del är 3 dm. Sekanten delar cirkelns periferi i två delar. Beräkna längden av den mindre av dessa delar.
7. Man betraktar de båda serierna

$$\frac{3}{2},\ \frac{3}{8},\ \frac{3}{32},\ \frac{3}{128},\ \cdots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

Visa, att om man i första serien tar summan av ett godtyckligt antal på varandra följande termer från och med den första

termen räknat, så kan man alltid i den andra serien finna ett antal på varandra följande termer från början räknat, vilka ha samma summa.

8. En rätvinklig triangel har kateterna $a$ och $b$. Höjden mot hypotenusan tages till diameter i en cirkel. Sök ett uttryck för ytan av den del av cirkeln, som ligger inom den ursprungliga triangeln. Hur stor blir nämnda yta, om $a = 3$ cm, $b = 4$ cm?

*Resultat:* **1.** Talen $= 5 \pm \sqrt{24}$; förhållandet $= 49 \pm 10\sqrt{24}$. **2.** Efter 29 kapitaliseringar blir årliga räntan 1 424 kr., efter 30 kapitaliseringar 1 474 kr.[1] **3.** $0{,}600(3)$. **4.** Sidorna äro 3 cm; 7 cm; 8 cm; vinklarna 21°,79; 60°; 98°,21. **5.** 33°,0(1). **6.** 3,810 dm. **7.** Från den andra serien skall tagas dubbelt så många termer som från den första. **8.** Ytan $= \frac{\pi a^2 b^2}{8(a^2 + b^2)} + \frac{a^3 b^3}{2(a^2 + b^2)^2}$; för $a = 3$ cm och $b = 4$ cm blir ytan $0{,}72\,\pi + 1{,}3824 = 3{,}644$ cm².

## Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Bestäm de system av värden å $x$ och $y$, som satisfiera ekvationssystemet

$$x + y = xy,$$
$$2x^2 + 2y^2 + xy = 27.$$

2. Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ och parabeln $y^2 = 2px$ skära varandra i punkterna $E$ och $G$, och kordan $EG$ går genom $F$, som är gemensam brännpunkt till de båda kurvorna. Sök hyperbelns excentricitet.

3. Vid en likbent triangel är den vid basen vidskrivna (= utantill inskrivna) cirkelns radie aritmetiska mediet till radierna i den inskrivna cirkeln och i den cirkel, som är vidskriven en av de lika sidorna. Sök triangelns vinklar.

4. Ett klot skäres med två parallella plan. Därvid delas dess yta i tre delar, som, tagna i sådan ordning att den mellan planen belägna delen blir den minsta, förhålla sig som 2 : 1 : 3. Beräkna förhållandet mellan de tre delarnas volymer.

[1] Det senare värdet försvaras i Stockholms-Tidningen (15, 16 och 18 april 1934), där olika tolkningar av textens innebörd diskuteras. Fullständiga lösningar av de matematiska och fysikaliska uppgifterna finnas i Svenska Dagbladet (8 och 10 april 1934).

5. På kurvan $y = x^3$ har man tagit punkten $P$ så, att normalen i $P$ med koordinataxlarna bildar en triangel, vars yta är $2\,^2/_3$ ytenheter. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka triangelns yta delas av kurvans tangent i punkten $P$.
6. I ett rätvinkligt koordinatsystem äro givna parabeln $3y = x^2$ samt punkten $P(0, 12)$. En likbent triangel har sin topp i $P$; dess bas är en med $x$-axeln parallell korda i parabeln. Om triangeln roterar kring $y$-axeln, uppkommer en kon. Angiv maximi- och minimivärdena av konens mantelyta, när kordans skärningspunkt med $y$-axeln rör sig från origo till $P$.
7. I triangeln $ABC$ är sidan $BC$ konstant och $= a$. Vinklarna variera så, att om $\sphericalangle A$ betecknas med $x$, så är $\sphericalangle B = 2x$. Visa, att triangelns yta $T$ kan skrivas $T = \frac{a^2}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$, och sök triangelns vinklar, då ytan är så stor som möjligt.
8. Man bildar alla möjliga bråk, i vilka täljaren är mindre än nämnaren samt såväl täljaren som nämnaren är ett av talen 1, 2, 3, 4, ... n. Beräkna summan av alla dessa bråk.
9. Ur en given triangel $ABC$ härledes en obegränsad följd av trianglar $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... på så sätt, att sidorna i triangeln $A_1B_1C_1$ utgöras av de yttre bissektriserna till triangeln $ABC$ och allmänt, att sidorna i en triangel utgöras av ytterbissektriserna till närmast föregående triangel. Det är lämpligt att välja beteckningarna så, att $A_1B_1$ blir ytterbissektrisen till vinkeln $C$ och analogt för alla sidor och trianglar. Visa, att då $n$ växer obegränsat, så närmar sig envar av vinklarna i triangeln $A_n B_n C_n$ ett bestämt gränsvärde.

*Resultat:* 1. $\begin{array}{c|c|c|c} x & 3 & 1{,}5 & \frac{1}{2}(\sqrt{21}-3) \\ y & 1{,}5 & 3 & -\frac{1}{2}(\sqrt{21}+3) \end{array} \quad \begin{array}{c|c} -\frac{1}{2}(\sqrt{21}+3) \\ \frac{1}{2}(\sqrt{21}-3) \end{array}$.

2. $\sqrt{2}+1$. 3. 67°,02; 67°,02; 45°,96. 4. I ordning som 14 : 13 : 27. 5. 5 : 3. 6. Max. $= 18\pi\sqrt{3}$ ytenheter för $y = 6$; min. $= 8\pi\sqrt{15}$ ytenheter för $y = 8$. 7. Vinklarna $A$, $B$, $C$ äro resp. 26°,81; 53°,62; 99°,57. 8. $\frac{n(n-1)}{4}$. 9. Gränsvärdet är för varje vinkel 60°.

## Uppgifter i fysik.

1. En kula, som från en punkt $A$ avskjutes snett uppåt, återkommer till det genom punkten $A$ gående horisontalplanet efter 6 sekunder. Huru högt över nämnda horisontalplan ligger banans högsta punkt? Till luftens motstånd behöver ingen hänsyn tagas. Accelerationen vid fritt fall är 9,8 m/sek².

2. En vågbalans, som är vridbar kring en vågrät och mot balansens längdriktning vinkelrät egg, har olika tunga armar. På den ena armen hänger en kula av kvartsglas i en mycket fin, böjlig tråd, som slutar i en ögla. Denna är trädd över vågarmen och kan förskjutas längs densamma. Vågbalansen är horisontell och i jämvikt, när avståndet mellan eggen och upphängningstråden är 15,9 cm. Då kulan efter vartannat nedsänkes i två kärl, innehållande samma vätska av temperaturerna — 78° C resp. + 100° C, måste man, för att vågbalansen skall inställa sig horisontellt, förskjuta öglan, så att avståndet mellan eggen och tråden blir 28,6 resp. 25,1 cm. Sök vätskans utvidgningskoefficient. Kulans utvidgning ävensom upphängningstrådens och öglans vikt kunna vid beräkningen lämnas utan avseende.
3. En avläsningskikare är så inställd, att man i den tydligt ser ett föremål, som befinner sig på ett avstånd från objektivet av 2,5 m. Tätt framför objektivet placeras en tunn lins, så att dess optiska huvudaxel sammanfaller med kikarens. För att man nu skall kunna tydligt se föremålet genom kikaren, måste avståndet mellan föremålet och kikarens objektiv vara 6 m. Avståndet mellan objektiv och okular är i båda fallen detsamma. Ögats inställning är även oförändrad. Sök den framför objektivet placerade linsens brännvidd till storlek och tecken.
4. Triangeln *ABC* är huvudsnittet till prismat i ett spektroskop. Strålarna från kollimatorn träffa sidan *AB* vinkelrätt och utträda ur prismat vid sidan *AC*. Den brytande vinkeln *BAC* är 30°. Kikaren är så inställd, att de strålar, vilkas brytningsexponent är 1,614, infalla mot objektivlinsen parallellt med kikarens optiska huvudaxel. Objektivets brännvid är 15 cm. Sök avståndet mellan den bild, som i objektivets fokalplan alstras av de nämnda strålarna, och den bild, som i samma plan alstras av de strålar, vilkas brytningsexponent är 1,634.
5. En plan spegel roterar med en hastighet av 120 varv i sekunden kring en vertikal axel, belägen i spegelns eget plan. Framför spegeln är uppställd en gnistinduktor med gniststräckan vertikal. I närheten av den senare finnes en skärm, utgörande en del av mantelytan till en cirkulär cylinder med radien 60 cm och axeln sammanfallande med spegelns axel. Ljusstrålar från de gnistor, som bildas vid urladdningarna i induktorn, passera först en samlingslins, reflekteras mot spegeln och träffa därefter skärmen. Linsen, vars optiska huvudaxel sammanfaller med normalen från gniststräckan mot spegelns vridnings-

axel, alstrar på skärmen vertikala bilder av urladdningarna. Två på varandra följande urladdningar ge bilder på 6 mm avstånd från varandra. Beräkna tiden mellan dessa urladdningar. Man behöver vid beräkningarna endast följa en stråle, som mellan gniststräckan och spegeln går utmed linsens optiska huvudaxel.

6. I ett horisontellt glasrör är längs axeln utspänd en manganintråd, som uppvärmes genom elektrisk ström av konstant styrka. Genom röret får vatten långsamt strömma med konstant hastighet. Vattnets temperatur är vid inträdet i röret 16°,50 C och vid utträdet 25°,35 C. Det värme, som vattnet mottagit, har lämnats av den elektriska strömmen. På två minuter rinna genom röret 115 g vatten. Trådens motstånd var 8,92 ohm och spänningen mellan dess ändpunkter 17,86 volt. Beräkna det antal gramkalorier, som alstras av en wattsekund. Värmeförluster genom strålning och ledning utåt rummet kunna lämnas utan avseende.

7. En mindre seriemotor för likriktad ström drives med en nätspänning på 110 volt. För igångsättning inkopplas i serie med motorn ett motstånd $R = 18$ ohm. Då strömmen slutes, är strömstyrkan ett ögonblick 5,4 amp, innan motorn börjat rotera; därefter sjunker den. Motståndet $R$ urkopplas så småningom, och då motorn direkt anslutits till nätet och nått sin normala rotationshastighet, är strömstyrkan 3,5 amp. Beräkna den motelektromotoriska kraft, som då induceras i ankaret.

8. I en strömbana ingår ett motstånd $R = 15$ ohm. Mellan dess ändpunkter anslutes en grenledning, innehållande en elektrolysapparat med en lösning av ett salt av tvåvärt kvicksilver. Det sammanlagda motståndet i denna grenledning utgör 1 800 ohm. Polarisationsspänningen kan lämnas utan avseende. På en viss tid avskiljes i elektrolysapparaten 0,941 g kvicksilver. Angiv den elektricitetsmängd, uttrycket i ampèretimmar, som samtidigt genomflutit motståndet $R$. För utfällning av en gramekvivalent av ett ämne åtgå 96 494 coulomb. Kvicksilvrets atomvikt är 200,6.

*Resultat:* **1.** 44,1 m. **2.** 0,00109. **3.** $-4\frac{2}{7}$ m. **4.** 2,6 mm. **5.** $6{,}63 \cdot 10^{-6}$ sek. **6.** 0,237 gkal. **7.** 101,7 volt. **8.** 30,18 amp. tim.

# Realskolexamen V. T. 1934.

## Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{2x}{x+3}+\frac{3x}{2x-6}=\frac{6(x^2-5)}{x^2-9}-2\frac{1}{2}.$$

2. Hur många tegel åtgå till en mur, som skall göras 7,25 m lång, 2,5 m hög och 0,5 m bred? Teglens dimensioner äro 30 cm, 15 cm och 7,5 cm. För murbruk (fogar) beräknas 12 procent av hela murens volym.

3. En handlande inköpte 240 kg ost efter ett pris av 1 kr. 30 öre per kg. För att förbättra kvaliteten lagrade han osten en tid, varvid emellertid 15 kg skadades och måste bortkastas. Vad borde han begära per kg för återstoden, då han för arbete m. m. i samband med lagringen hade en kostnad av 18 kr. och ville förtjäna 20 % på sina utlagda pengar?

4. En person köper till 105 % kurs 12 st. 4 1/2 % obligationer, vardera å nominellt 1 000 kr. Den härför erforderliga penningsumman uttager han å sin bankräkning. Hur mycket större blir personens årliga ränta efter köpet av obligationerna, då banken ger 3 1/2 % å insatta medel?

5. I en rätvinklig triangel äro kateterna 18 cm och 24 cm. Genom en punkt på hypotenusan, 5 cm från den ändpunkt av densamma, från vilken den mindre kateten utgår, är en transversal dragen parallellt med denna katet. Beräkna ytorna av de två delar, i vilka triangeln uppdelas av transversalen.

6. Två personer A och B resa kl. 8 f. m. varandra till mötes från två på 233 km:s avstånd belägna platser. Efter 1 1/2 timmes färd, då de äro 125 km från varandra, vila båda, A i 15 minuter och B i 25 minuter. Därefter fortsätta de med samma hastigheter som förut, tills de mötas kl. 11,35 f. m. Hur stora voro deras hastigheter?

7. 4 st. rektangulära trädgårdsland, vartdera 5 m långt och 1,2 m brett, skola bevattnas. Härtill användes en vattenkanna, som har formen av en cylinder med inre diametern 22 cm och höjden 26 cm. Till rymden av det med stril försedda sidoröret behöver hänsyn ej tagas. Hur många sådana kannor fulla med vatten åtgå, för att bevattningen, jämnt fördelad på de nämnda trädgårdslanden, skall motsvara 10 mm regn? $\pi = 3{,}14$.

8. Två kongruenta rätvinkliga trianglar med kateterna 16 cm och 30 cm äro lagda över varandra, så att de vinklar, som stå emot de bägge längre kateterna, sammanfalla, under det att dessa

kateter själva skära varandra. Bestäm ytan av den fyrhörning, som är gemensam del av de två trianglarna.

*Resultat:* 1. $x = 5$. 2. 2363 st. 3. 1,76 kr. 4. 99 kr. 5. 150 cm²; 66 cm². 6. *A* och *B* 30 resp. 42 km per tim. 7. 25 st. (24 »fulla» kannor, av den 25:e åtgår blott en del). 8. 153,6 cm².

## Föredrag.

(Forts. från sid. 117.)

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. O. Klein, sekr. fil. lic. E. Fredlund.

Föredrag: fil. lic. H. Arnfelt, Grafit och andra ämnen med skiktgitterstruktur (²¹/₂); prof. G. Borelius, De metalliska blandfaserna och deras omvandlingar (⁷/₃); prof. O. Klein, Om Diracs teori över positiva och negativa elektronen (²⁴/₃); amanuens E. Fredlund, Om en metod för akustisk spektralanalys (¹⁴/₄); fil. kand. P. Erik Wretblad, Om kornstorleksbestämning medelst slamningsanalys (⁸/₅).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. laborator R. Nilsson.

Föredrag: prof. K. Myrbäck, Om lyo- och desmoenzymer. Frågan om reform av den biologiska kemiens nomenklatur (²⁶/₂); Dr. ing. Frau Ida Noddack, Lücken des periodischen Systems (²/₅); Regierungsrat Dr. Walter Noddack, Ueber geochemische Verteilungskoefficienten der Elemente (²/₅).

*Uppsala:*

Matematiska Föreningen, ordf. doc. E. Beurling, sekr. fil. lic. E. Lunell.

Föredrag: prof. T. Nagell, Diofantiska ekvationer (⁶/₂); doc. A. Beurling, Om några lineära ekvationssystem med oändligt många obekanta (²⁷/₃); dr. phil. Th. Skolem, Orienterande föredrag över det forskningsområde, som upptager matematikens grundbegrepp och postulat till analys (⁸/₅).

Fysiska Sällskapet, ordf. laborator B. Beckman, vice ordf. doc. E. Bäcklin.

Föredrag: amanuens E. Ingelstam, Nyare rön med molekylarstrålemetoden (⁷/₃); fil. mag. H. Karlsson, Den tunga väteisotopen (⁷/₃).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. L. Ramberg, sekr. fil. lic. A. Fredga.

Föredrag: doc. A. Tiselius, Vattnets diffusion i zeolitkristaller (¹⁹/₁); prof. L. Ramberg, Demonstration av en del laboratorieapparatur av ny typ (²⁶/₃); fil. lic. R. Junell, Tautomera omlagringar hos nitroetan (²⁶/₃); doc. P. Nylén, Nya halogenoxider (²⁶/₄).

# Pytagoreiska trianglar.

Av B. BERGGREN.

Med utgång från Brahmaguptas formler $x = \alpha^2 + \beta^2$, $y = \alpha^2 - \beta^2$, $z = 2\alpha\beta$ har H. RATH [1] genom att införa differensen $\alpha - \beta = d$ löst problemet att tabulera samtliga pytagoreiska trianglar.

Utan kännedom om detta Raths arbete har jag från annan utgångspunkt funnit ett antal relationer mellan heltalslösningar till ekv.

$$x^2 = y^2 + z^2, \tag{1}$$

vilka leda till samma mål, men synas mig giva en del nya synpunkter på problemet.

Är likheten (1) satisfierad av $x = a$, $y = b$, $z = c$, där $a, b, c$ äro positiva hela tal, så säga vi, att $\Delta(a, b, c)$ är en positiv rätvinklig triangel med hypotenusan $a$ och kateterna $b$ och $c$. Då i det följande talas om trianglar, mena vi alltid rätvinkliga sådana. Vidare antages alltid $b > c$.

Ekv. (1) satisfieras nu även av

$$\left.\begin{matrix} x = a \\ y = b \\ z = -c \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = a \\ y = c \\ z = -b \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x = a \\ y = -c \\ z = -b \end{matrix}\right\},$$

där $y$ och $z$ valts så, att $y > z$. Vi benämna $\Delta(a, b, -c)$, $\Delta(a, c, -b)$, $\Delta(a, -c, -b)$ de tre negativa adjungerade trianglarna till $\Delta(a, b, c)$. Vi betrakta alltså alltid hypotenusan som en positiv kvantitet. På grund härav är denna entydigt bestämd genom kateterna, och vi kunna i st. f.

[1] Archiv f. Math. u. Phys. 56 p. 188.

$\Delta(a, b, c)$ använda den kortare beteckningen $\Delta(b, c)$, där $b$ och $c$ äro kateterna. Gemensam divisor till två av triangelns sidor är tydligen även divisor till den tredje. Trianglar utan dylik gemensam divisor sägas vara primitiva. Vi förutsätta i det följande, att $\Delta(a, b, c)$ är primitiv.

De primitiva trianglarnas fundamentaltransformation.

Mot varje triangel $(a, b, c)$ svarar en triangel $(a + k, b + k, c + k)$, ty vi få genom insättning i (1) $k^2 + 2ak = = k^2 + 2bk + k^2 + 2ck$, varav

$$\left.\begin{aligned} k &= 2(a - b - c) \\ x &= k + a = 3a - 2b - 2c \\ y &= k + b = 2a - b - 2c \\ z &= k + c = 2a - 2b - c \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

För att $y$ skall bli positiv fordras, att $4a^2 > b^2 + 4c^2 + 4bc$ eller alltså $3b^2 > 4bc$. Motsvarande villkor för att $z$ skall vara positiv är att $3c^2 > 4bc$. Både $y$ och $z$ kunna således ej samtidigt vara positiva. Triangeln $(x, y, z)$ är en negativ triangel. Denna olägenhet kan enkelt övervinnas genom att tillämpa transformationen (2) på den negativa triangeln $(a, -c, -b)$. Vi få

$$\left.\begin{aligned} k &= 2(a + b + c) \\ x &= k + a = 3a + 2b + 2c \\ y &= k - c = 2a + 2b + c \\ z &= k - b = 2a + b + 2c \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

och benämna detta system de primitiva pytagoreiska trianglarnas *fundamentaltransformation*. Ur den kunna samtliga pytagoreiska trianglar erhållas. Vi konstatera nämligen lätt följande egenskaper hos transf. (3):

Den är *unimodulär* och ger den inversa transf.

$$\left.\begin{aligned} k &= 2(y + z - x) \\ a &= x - k = 3x - 2y - 2z \\ b &= k - z = -2x + 2y + z \\ c &= k - y = -2x + y + 2z \end{aligned}\right\}. \qquad (3\,b)$$

Vidare har den invarianterna $x^2 - y^2 - z^2 = a^2 - b^2 - c^2$ och $y - z = b - c$. Vår transf. (3) förvandlar alltså en given rätvinklig triangel i en annan dylik med oförändrad differens mellan kateterna. Detsamma gäller transf. (3 b). Är $\Delta(a, b, c)$ positiv, blir också $\Delta(x, y, z)$ positiv, men ej nödvändigt tvärtom. Är $\Delta(a, b, c)$ primitiv, blir också $\Delta(x, y, z)$ primitiv och omvänt. Vi sätta

$$y - z = b - c = \lambda_1;$$

samtliga trianglar med samma katetdifferens $\lambda$ sägas utgöra en till detta $\lambda$-värde hörande grupp. Genom att vi valt $b > c$ uppnå vi, att $\lambda$ alltid blir positivt.

Med utgång från $\Delta(a, b, c)$ kunna vi bilda en oändlig serie av allt större positiva och primitiva trianglar, alla tillhörande samma $\lambda = \lambda_1$. Dessa trianglar bli alltmera likbenta, ju högre upp man kommer.

Använda vi transf. (3) på trianglarna $(a, b, -c)$, $(a, c, -b)$, $(a, -c, -b)$, få vi trianglarna

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 3a + 2b - 2c \\ y_1 &= 2a + 2b - c \\ z_1 &= 2a + b - 2c \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= 3a + 2c - 2b \\ y_2 &= 2a + 2c - b \\ z_2 &= 2a + c - 2b \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x_3 &= 3a - 2b - 2c \\ y_3 &= 2a - b - 2c \\ z_3 &= 2a - 2b - c \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Av dessa trianglar är den tredje identisk med den ur transf. (2) erhållna och således negativ. De två trianglarna $(x_1, y_1, z_1)$ och $(x_2, y_2, z_2)$ äro båda positiva och primitiva men höra till ett nytt $\lambda$-värde

$$\lambda_2 = y_1 - z_1 = y_2 - z_2 = b + c > \lambda_1. \qquad (5)$$

Varje triangel $(a, b, c)$ utgör alltså så att säga förgrening för de båda värdena $\lambda_1$ och $\lambda_2$. Till det större av dessa, $\lambda_2$, höra två grenar eller serier, som representeras av trianglarna $(x_1, y_1, z_1)$ och $(x_2, y_2, z_2)$. Från dessa trianglar kunna vi fortsätta resp. serier godtyckligt långt uppåt med transf. (3). Fortsätta vi i stället nedåt till mindre trianglar med (3 b), återfå vi $\Delta(a, b, -c)$ resp. $\Delta(a, c, -b)$, alltså negativa trianglar. Utgångsstället för de bägge $\lambda_2$-serierna är alltså $\Delta(x_1, y_1, z_1)$ och $\Delta(x_2, y_2, z_2)$ eller, om man så vill, $\Delta(a, b, c)$.

Även $\lambda_1$-gruppen kan då väntas omfatta två serier. Detta konstateras också genom att följa serien nedåt med (3 b) till den första triangel, som blir negativ. Låt denna vara $\Delta(p, q, r)$. Då är den närmast större triangeln $(\alpha, \beta, \gamma)$ positiv och vi ha enl. (3 b)

$$\left.\begin{aligned} p &= 3\alpha - 2\beta - 2\gamma \\ q &= 2\alpha + 2\beta + \gamma \\ r &= -2\alpha + \beta + 2\gamma \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

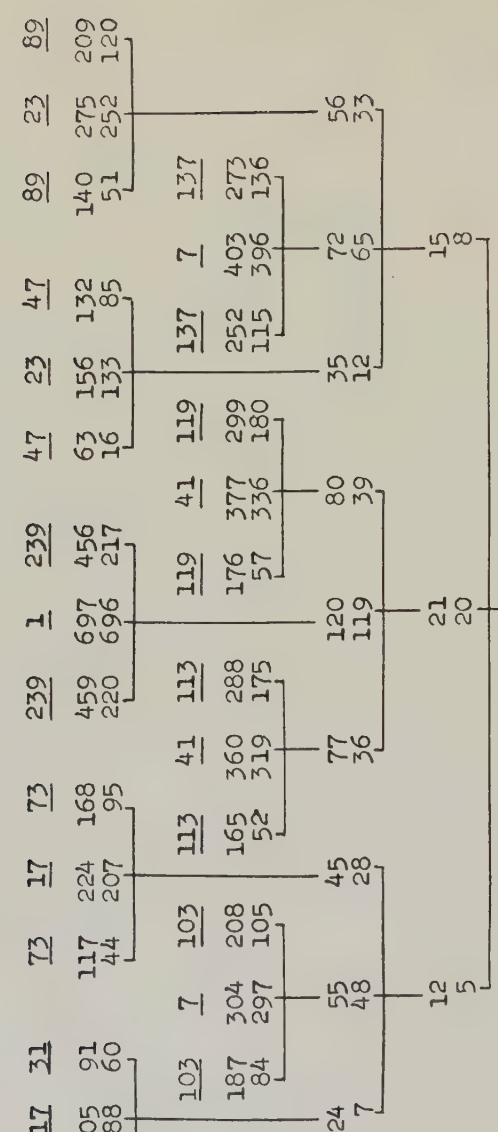
Här kunna ej både $q$ och $r$ vara negativa, ty transf. (3), använd på $\Delta(p, q, r)$, ger ju $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$, alltså positiv triangel, medan vi förut ha funnit, att (3), använd på triangel med två negativa kateter, ger negativ triangel. Den större kateten, $q$, är således positiv, den mindre, $r$, är negativ. Vi sätta då $r = -r_1$. Den positiva triangeln $(p, q, r_1)$, event. $(p, r_1, q)$, tillhör ett mindre $\lambda$-värde $\lambda_0 = |q - r_1|$. Vi ha $\lambda_1 = \beta - \gamma = q - r = q + r_1 > \lambda_0$. Användes nu transf. (3) på trianglarna $(p, q, -r_1)$ och $(p, r_1, -q)$, få vi två olika trianglar, båda tillhörande $\lambda_1$. En till givet $\lambda$-värde hörande serie kan alltså fortsättas nedåt, tills den minsta kateten blir negativ. Teckenändring av denna katet ger sedan triangel med nytt mindre $\lambda$-värde, medan teckenändring av bägge kateterna ger den andra serien till det givna $\lambda$-värdet. Den minsta positiva triangeln i varje serie säges vara *primär*. De primära trianglarna uppträda parvis. Den till $\lambda = 1$ hörande gruppen utgör ett undantag. Denna grupp omfattar blott en serie, som nedåt slutar med (5, 4, 3) eller, om man så vill, med (1, 1, 0). Det saknas här ett *mindre* $\lambda$-värde för förgreningen. Man kan också säga, att kateten 0, som annars ej kan förekomma i *primitiva* trianglar, avbryter fortsättningen nedåt. Ett annat sätt är att betrakta $\Delta(1, 1, -0)$ som negativ triangel. Förgrening från denna ger de båda positiva trianglarna (5, 4, 3) och (1, 1, + 0), som då skulle vara de båda primära trianglarna tillhörande $\lambda = 1$. Fortsättes den med $\Delta(1, 1, +0)$ början serien uppåt, få vi närmast $\Delta(5, 4, 3)$ och därefter i ordning de

övriga trianglarna i tillhörande serie. De båda till $\lambda = 1$ hörande serierna sammanfalla alltså, om den ena serien förskjutes ett steg.

### De primitiva trianglarnas stamträd.

Utgående från en godtyckligt vald primitiv triangel $(a, b, c)$ kunna vi nu konstruera ett *stamträd* för samtliga primitiva trianglar. Vi följa först den serie, som $\Delta(a, b, c)$ tillhör, nedåt till första negativa triangel och finna där en förgrening med nytt mindre $\lambda$-värde samt bägge de primära trianglarna till vårt ursprungliga $\lambda$-värde. Sedan följa vi det nya $\lambda$-värdets serie nedåt på samma sätt till allt mindre $\lambda$-värden och trianglar och komma till sist till $\lambda = 1$ och dess primära trianglar (5, 4, 3) och (1, 1, 0). Alla på detta sätt beräknade trianglar ge upphov till förgreningar med nya, allt större $\lambda$-värden, vart och ett med sina två triangelserier, som kunna fortsättas obegränsat uppåt. Äger ett $\lambda$-värde fler än två serier, är antalet alltid jämnt och varje par anträffas på sitt särskilda förgreningsställe. Varje annan primitiv triangel alstrar ett liknande träd, som kan följas nedåt till samma *rot*, $\Delta(5, 4, 3)$, och därifrån uppåt igen till precis samma förgreningar, $\lambda$-värden och trianglar. *De båda stamträden måste sammanfalla.*

Vi välja som numeriskt exempel den till $\lambda = 119$ hörande triangeln (769, 600, 481) och få successivt de mindre trianglarna (145, 143, 24) och (101, 20, — 99). Då den sista av dessa är negativ, är den första primär; $\Delta(101, 99, 20)$ hör till $\lambda = 79$ och följes nu till $\Delta(65, 16, -63)$. Triangeln (65, 63, 16) med $\lambda$-värdet 47 leder till $\Delta(37, 12, -35)$, $\Delta(37, 35, 12)$ med $\lambda = 23$, $\Delta(17, 8, -15)$, $\Delta(17, 15, 8)$ med $\lambda = 7$ och slutligen $\Delta(5, 4, -3)$, $\Delta(5, 4, 3)$ med $\lambda = 1$. Välja vi sedan av dessa trianglar $\Delta(17, 15, 8)$ med $\lambda = 7$, få vi dels $\Delta(17, 8, -15)$, som leder till $\Delta\Delta(37, 35, 12)$, (205, 156, 133), (1193, 855, 832) o. s. v., dels $\Delta(17, 15, -8)$, som ger $\Delta\Delta(65, 56, 33)$, (373, 275, 252), (2173, 1548, 1525) o. s. v., samtliga hörande till $\lambda = 23$. I stamträdet äro varje triangels




De primitiva trianglarnas stamträd.

kateter placerade över varandra. De understrukna siffertalen ange grenarnas $\lambda$-värden.

Betecknas transf. (2) med $S(a, b, c)$, kan transf. (3) skrivas $S(a, -c, -b)$ och de båda första transf. (4) $S(a, b, -c)$ resp. $S(a, c, -b)$. Man kan naturligtvis även välja en av de båda senare till fundamentaltransformation. Bestämma vi oss för transf. $S(a, c, -b)$, få vi invarianterna $x - y$ för stammen och $x + z$ resp. $x - z$ för grenarna. De fördelar eller nackdelar, som detta val medför, överlåtes åt den intresserade läsaren att själv utspekulera.

*Sambandet mellan ett par primära trianglar.* De bägge första systemen (4) gälla för ett godtyckligt sådant par och ge, adderade två och två

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6a \\ y_1 + z_2 &= 4a \\ y_2 + z_1 &= 4a \end{aligned}\right\}.$$

Det första systemet (4) ger dessutom $a = 3x_1 - 2y_1 - 2z_1$ och vi få lätt

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 17x_1 - 12y_1 - 12z_1 \\ y_2 &= 12x_1 - 8y_1 - 9z_1 \\ z_2 &= 12x_1 - 9y_1 - 8z_1 \end{aligned}\right\}.$$

Denna transformation är unimodulär och sin egen inversa transf. Den har invarianterna $x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$ och $y_1 - z_1 = y_2 - z_2$. Användes den på en positiv triangel, som icke är primär, ger den en negativ triangel.

### Några satser beträffande $\lambda$.

1. Två $\lambda$-värden bestämma entydigt förgreningstriangeln, om sådan finnes, ty antag $\lambda_1 > \lambda_2$, så är $\lambda_1 = b + c$, $\lambda_2 = b - c$ och alltså $b = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$, $c = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$. Är $b^2 + c^2$ kvadrattal $= a^2$, så är $\Delta(a, b, c)$ förgreningstriangel för $\lambda_1$ och $\lambda_2$.

2. En förgrenings båda $\lambda$-värden satisfiera likheten

$$2a^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \qquad (7)$$

3. Samtliga divisorer till $\lambda$ måste vara av formen $8k \pm 1$. Detsamma gäller då också $\lambda$ självt. — Att $\lambda$ är ett udda tal framgår av (7).

*Bevis:* Vi sätta enl. (7) $\lambda_1^2 = 2a^2 - \lambda_2^2$.

Är $p$ primtalsdivisor till $\lambda_2$, få vi kongruenserna

$$2a^2 \equiv \lambda_1^2 \qquad (\text{mod. } p)$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \cdot a^{p-1} \equiv \lambda_1^{p-1} \quad ( \quad » \quad )$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \qquad ( \quad » \quad ).$$

Av denna sista kongruens följer, att 2 är kvadratisk rest (mod. $p$) och $p \equiv \pm 1$ (mod. 8). V. s. b.

(Se t. ex. P. Bachmann: Grundlehren d. Neueren Zahlentheorie, Kap. III.)

Denna sats är av intresse. Den visar t. ex., att om kateterna skola ha differensen 21, triangeln ej kan vara primitiv. Dess sidor måste äga den gemensamma divisorn 3 (event. 21). De minsta trianglarna med katetdifferensen 21 äro (39, 36, 15), (51, 45, 24) och (105, 84, 63). Tabell 1. ger samtliga $\lambda$-värden $< 1000$. De med fetstil tryckta talen innehålla två olika primfaktorer.

Tabell över $\lambda$-värden.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 17 | 23 | 31 | 41 | 47 | 49 | 71 | 73 | 79 | 89 | 97 |
| 103 | 113 | **119** | 127 | 137 | 151 | **161** | 167 | 191 | 193 | 199 | | |
| **217** | 223 | 233 | 239 | 241 | 257 | 263 | 271 | 281 | **287** | 289 | | |
| 311 | 313 | **329** | 337 | 343 | 353 | 359 | 367 | 383 | **391** | | | |
| 401 | 409 | 431 | 433 | 439 | 449 | 457 | 463 | 479 | 487 | **497** | | |
| 503 | **511** | 521 | **527** | 529 | **553** | 569 | 577 | 593 | 599 | | | |
| 601 | 607 | 617 | **623** | 631 | 641 | 647 | 673 | **679** | **697** | | | |
| **713** | 719 | **721** | 727 | 743 | 751 | 761 | 769 | **791** | **799** | | | |
| 809 | 823 | **833** | 839 | 857 | 863 | 881 | 887 | **889** | | | | |
| 911 | 919 | 929 | 937 | **943** | 953 | **959** | 961 | 967 | 977 | 983 | 991 | |

4. Om 2 är kvadratisk rest (mod. $\lambda_1$) och $\lambda_1$ är ett udda tal, så kan man alltid finna ett par trianglar tillhörande detta $\lambda$-värde.

*Bevis:* Antag, att $\lambda_1$ är ett sådant tal, och att satsen gäller för samtliga *mindre* $\lambda$-värden. Vi vilja då visa, att den gäller även för $\lambda_1$. Vi kunna alltid under den gjorda förutsätt-

ningen finna två hela positiva tal $p$ och $x < \lambda_1$, så att $p\lambda_1 = x^2 - 2$. Kvadrera vi här, få vi

$$p^2\lambda_1^2 = (x^2 - 2)^2 = 2(x^2 - 2x + 2)^2 - \\ - (x^2 - 4x + 2)^2 = 2a^2 - b^2. \qquad (8)$$

Här kan tydligtvis $p$ utom faktorn 2 blott innehålla faktorer av formen $8k \pm 1$ (»$\lambda$-faktorer»). Om likheten skrives $4a^2 = (b + p\lambda_1)^2 + (b - p\lambda_1)^2$, ha vi fått en pytagoreisk triangel med katetdifferensen $2p\lambda_1$. Triangeln göres primitiv genom att bortskaffa tvåor och övriga gemensamma divisorer. Reduceras härigenom katetdifferensen till $\lambda_1$, är påståendet bevisat. I motsatt fall måste den reducerade differensen vara $\lambda_1\lambda_2$, där $\lambda_2$ är av samma form som $\lambda_1$ och tydligen mindre än $\lambda_1$. Då den bortdividerade gemensamma divisorn måste ingå i samtliga $b$, $p$ och $a$, kan även (8) reduceras till

$$\lambda_1^2\lambda_2^2 = 2a_1^2 - b_1^2. \qquad (8\,b)$$

Enär $\lambda_2 < \lambda_1$, kunna vi enligt förutsättning och sats 2 ekv. (7) för $\lambda_2$ uppställa en relation $\lambda_2^2 = 2a^2 - \beta^2$. Vi förutsätta först, att $\lambda_2$ är ett primtal. I syst.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2\lambda_2^2 &= 2a_1^2 - b_1^2 \\ \lambda_2^2 &= 2a^2 - \beta^2 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

äro samtliga kvantiteter kända hela tal. Vi söka nu två hela tal $\alpha_1$, $\beta_1$, sådana att

$$\lambda_1^2 = 2\alpha_1^2 - \beta_1^2 \qquad (B)$$

och sätta för att vinna detta

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha x + \beta y \\ b_1 &= \beta x + 2\alpha y \end{aligned}\right\}. \qquad (C)$$

Vi få härav

$$2a_1^2 - b_1^2 = 2\alpha^2x^2 + 2\beta^2y^2 - \beta^2x^2 - 4\alpha^2y^2 = \\ = 2(\alpha^2 - \beta^2)\,(x^2 - 2y^2)$$

och således

$$\lambda_1^2 = x^2 - 2y^2. \qquad (D)$$

Vi visa först, att syst. (C) (efter lämpligt teckenval) ger heltalslösning $x$, $y$. Vi få nämligen

$$\left.\begin{aligned}(2\alpha^2 - \beta^2)x &\equiv 2\alpha a_1 - \beta b_1 \\ (2\alpha^2 - \beta^2)y &\equiv \alpha b_1 - \beta a_1\end{aligned}\right\}. \qquad (E)$$

Här är $2\alpha^2 \equiv \beta^2$ och $2a_1^2 \equiv b_1^2$ (mod. $\lambda_2^2$) och således $4\alpha^2 a_1^2 \equiv \beta^2 b_1^2$ eller $2\alpha a_1 \equiv \pm \beta b_1$. Då vi ju enl. (A) kunna förfoga över tecknet för $b_1$, kunna vi alltid uppnå, att $2\alpha a_1 \equiv \beta b_1$ eller $2\alpha a_1 \cdot \beta^2 \equiv \beta b_1 \cdot 2\alpha^2$, och eftersom $2\alpha\beta$ är rel. primtal till $\lambda_2$, få vi då $\beta a_1 \equiv \alpha b_1$. Alltså kan $\lambda_2^2$ bortdivideras ur (E); $x$ och $y$ bli hela tal.

Skriva vi nu (D) $\lambda_1^2 = 2(x \pm y)^2 - (x \pm 2y)^2$, ha vi fått två lösningar till $\lambda_1^2 = 2r^2 - s^2$ och därmed också bevisat påståendet. Är $\lambda_2$ ej primtal, inses lätt, hur man med denna metod kan ur (8 b) bortskaffa en primtalsdivisor till $\lambda_2$ i sänder.

5. Är $\lambda_1$ primtal eller dignitet av primtal, finnes blott *ett* par primära trianglar tillhörande detta $\lambda$-värde.

6. Innehåller $\lambda_1$ $n$ st. olika primfaktorer finnas $2^{n-1}$ par primära trianglar. Så har $\lambda = 119 = 7 \cdot 17$ paren (145, 143, 24)⌒(461, 380, 261); (185, 176, 57)⌒(349, 299, 180). Av $\lambda = 2737 = 7 \cdot 17 \cdot 23$ fås paren (4633, 4345, 1608)⌒(7325, 6364, 3627); (5585, 5073, 2336)⌒(6037, 5412, 2675); (3517, 3445, 708)⌒(9953, 8272, 5535); (2813, 2812, 75)⌒(13177, 10585, 7848).

Man får alltid två par genom att uppdela $\lambda_1$ i två faktorer $p_1$ och $p_2$ utan gemensam divisor. Skrives $p_1^2 = a_1^2 - 2b_1^2$; $p_2^2 = a_2^2 - 2b_2^2$ har man [1] $\lambda_1^2 = p_1^2 p_2^2 = (a_1 a_2 \pm 2b_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2 \pm a_2 b_1)^2$ eller två lösningar till $\lambda_1^2 = a^2 - 2b^2$. Denna ekv. transformerad till $\lambda_1^2 = 2(a \pm b)^2 - (a \pm 2b)^2$ ger sedan ett par primära trianglar tillhörande $\lambda_1$ för varje par $(a, b)$. Göres uppdelningen av $\lambda_1$ så att $p_2$ blott omfattar en primfaktor (eller dess dignitet), så måste $p_1$ innehålla övriga $(n-1)$ st. primfaktorer och kan då på $2^{n-2}$ oberoende sätt skrivas som $a_1^2 - 2b_1^2$, vart och ett ledande till två par primära trianglar för $\lambda_1$.

Bevisen för (5) och (6) uteslutes av utrymmesskäl.

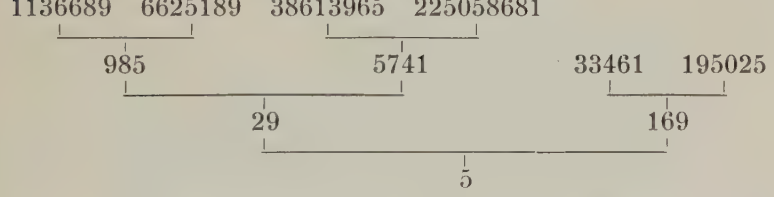
[1] Likheten $p^2 = 2x^2 - y^2$ kan nämligen ersättas med $p^2 = (2x \pm y)^2 - 2(x \pm y)^2$.

Tabell över alla primitiva trianglar med hypotenusa $< 1000$ återfinnes i denna tidskrift årg. *8* p. 191.

Som en kuriositet förtjänar här att nämnas, att de till $\lambda = 1$ hörande trianglarna, som vi ju inordnat i en enda serie, likväl kunna fås att uppträda förgrenade till ett eget träd. Utgå vi nämligen från den godtyckligt valda $\Delta(x, y+1, y)$ och sätta

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (2y+1+x)^2 + x^2 \\ y_1 &= 2x\,.\,(2y+1+x) \\ z_1 &= (2y+1+x)^2 - x^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= x^2 + (2y+1-x)^2 \\ y_2 &= 2x\,.\,(2y+1-x) \\ z_2 &= x^2 - (2y+1-x)^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (9)$$

så bliva $\Delta(x_1, y_1, z_1)$ och $\Delta(x_2, y_2, z_2)$ enl. Brahmaguptas formler rätvinkliga samt få, vilket lätt verifieras, katetdifferensen $\lambda = 1$. De bliva då också naturligtvis primitiva (liksom alla trianglar med denna katetdifferens). Det kan utan svårighet visas, att *samtliga* till $\lambda = 1$ hörande trianglar ingå i det stamträd, som alstras genom successivt an-




vändande av transf. (9) och med utgång från $\Delta(5, 4, 3)$. Bifogade schema upptager blott hypotenusan.

Till sist ber jag att till Lektor AGNE WAHLGREN få hembära min stora tacksamhet såväl för ett flertal goda råd och uppslag som ock för värdefull hjälp med stamträdets konstruerande.

# Parallellaxiomet för en yta av oändlig utsträckning.

Av HENRIK PETRINI.

*Lemma.* Genom en yttre punkt kan man alltid draga en rät linje parallell med en given rät linje, om ytan har en oändlig utsträckning.

I den vanliga formuleringen lyder parallellaxiomet:

Från en yttre punkt kan man draga endast *en* rät linje parallell med en given rät linje (jfr HILBERT, »Grundlagen der Geometrie» ax. IV).

Denna formulering är strängt taget för allmänt hållen: det räcker med följande axiom:

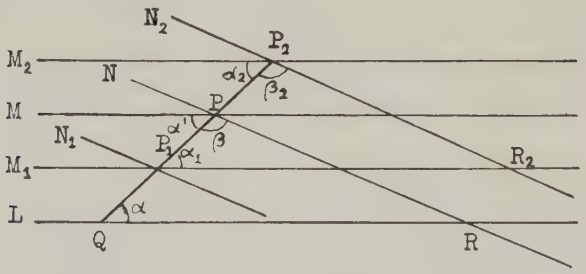



Fig. 1

*Parallellaxiomet: Det finns i det oändligt utsträckta planet en rät linje L (fig. 1) och en yttre punkt P sådana, att man från P kan draga endast en enda rät linje parallell med L.*

Vi skola nämligen bevisa följande sats:

*Om parallellaxiomet gäller för en viss rät linje L och en viss yttre punkt P, så gäller det för alla yttre punkter och alla räta linjer.*

1:o. Ty drag (fig. 1) genom P räta linjen M $\|$ L ($\alpha' = \alpha$, lemma), och tag en godtycklig punkt $P_1$ mellan L och M.

Då måste räta linjen $PP_1$ råka L (enl. antagandet) i en punkt Q.

Drag nu genom $P_1$ räta linjen $M_1 \parallel L$ ($\alpha_1 = \alpha$). Då påstås, att varje annan rät linje $N_1$ som går genom $P_1$, skär L. Drag genom P räta linjen $N \parallel N_1$. Enligt antagandet råkas L och N i en punkt R. Drager man nu ut linjen $N_1$, så att den kommer utanför $\Delta PQR$, så måste den skära L (jfr HILBERT II: 4).

Axiomet gäller alltså för alla punkter ($P_1$), som ligga mellan L och M.

2:o. I fig. 1 antages liksom i 1:o, att L, P, $P_1$, M, $M_1$ och $PP_1Q$ äro konstruerade. Drag ut $P_1P$ åt P till, och gör $P_1P_2 = QP$. Drag genom $P_2$ linjen $M_2 \parallel L$ ($\alpha_2 = \alpha$). Vi skola nu bevisa, att om man genom $P_2$ drager en annan rät linje $N_2$, så måste $N_2$ råka L. Ty drages genom P en linje $N \parallel N_2$ ($\beta = \beta_2$), så måste den enligt antagandet råka L i en punkt

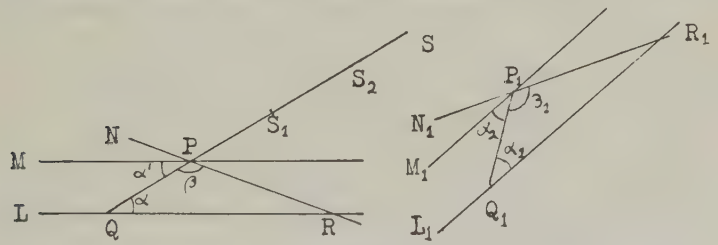



Fig. 2.

R, ty N kan inte sammanfalla med M. Avsätt på $M_1$ stycket $P_1R_2 = QR$. Då är $\Delta P_1P_2R_2 \cong \Delta QPR$ (1:sta kongr.f.), varav följer, att $P_2R_2$ faller utefter $N_2$. Enl. 1:o måste då $N_2$ utdragen råka L, eftersom den skär $M_1$ i en punkt $R_2$, som faller mellan L och M. Då nu axiomet således gäller för $P_2$ och L, så gäller det enligt 1:o för alla punkter mellan L och $M_2$. Således gäller axiomet för alla punkter på M.

3:o. I fig. 2 antagas L, P och M konstruerade liksom i mom. 1:o. Tag en godtycklig punkt S i planet utanför området mellan linjerna L och M och på den sidan om L, där P ligger. Sammanbind S med P och drag ut linjen SP, tills

den enl. antagandet råkar L i en punkt Q. Avsätt sträckan QP på PS oupphörligt, tills S faller på den sista sträckan, vilket enligt Archimedes' axiom alltid är möjligt att utföra genom ett ändligt antal operationer. Kalla den första delningspunkten för $S_1$. Genom ett liknande bevis som i 2:o finner man enl. 2:o, att axiomet även gäller för punkten $S_1$. Då gäller detsamma om $S_2$, där $QS_2 = 2QS_1$ etc., tills man kommer förbi S, och enl. 1:o gäller då axiomet även för S.

Vi ha således hittils bevisat, att axiomet gäller för samtliga punkter i planet, som ligga på samma sida om L som P.

4:o. I fig. 2 äro L och P givna. Genom P drages $M \parallel L$, och P sammanbindes med en godtycklig punkt Q på L. Drag nu en godtycklig rät linje $L_1$ och tag på denna en punkt $Q_1$. Avsätt vid $Q_1$ vinkeln $\alpha_1 = \alpha$ åt endera sidan om $L_1$ och gör $Q_1P_1 = QP$. Drag genom $P_1$ linjen $M_1 \parallel L_1$ ($\alpha_2 = \alpha_1$). Drag en annan rät linje $N_1$ genom $P_1$. Vi skola nu bevisa, att $N_1$ utdragen råkar $L_1$. Avsätt vid P vinkeln $\beta = \beta_1$ genom att draga linjen N. Lätt inses, att N inte kan sammanfalla med M, och alltså måste N enl. antagandet råka L i en punkt R. Avsätt $Q_1R_1 = QR$. Då blir $\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle PQR$; $\therefore P_1R_1$ faller utefter $N_1$. Axiomet gäller således för $L_1$ och $P_1$. Om vinkeln $\alpha_1$ hade avsatts åt motsatt sida om $L_1$, så hade man fått en punkt även på denna sida, för vilken axiomet gäller.

Härmed är uppvisat, att axiomet gäller för en godtycklig rät linje $L_1$ och (enl. 3:o) för samtliga yttre punkter i planet.

---

# Ett försök till elementär behandling av entropibegreppet.

Av STIG COMÉT.

Avsikten är att giva en någorlunda elementär och »konkret» definition på entropibegreppet, att visa entropiens huvudegenskaper samt att tillämpa reglerna på en del specialfall. Därvid avses i främsta rummet de ideala gasernas entropi (jämför dock sats A). Med hjälp av termodynamikens andra huvudsats kunna lagarna visas vara allmängiltiga; härpå skall ej ingås. Framställningen förutsätter icke kännedom om integralkalkyl och ej heller isentropens ekvation för en idealgas. Följande satser förutsättas emellertid: 1:o allmänna tillståndslagen för en idealgas, 2:o huru det »yttre arbetet» åskådliggöres i ett $pv$-diagram.

Deduktionerna gälla hela tiden massenheten. Beteckningarna äro de vanliga: $p$, $v$, $T$, $Q$, $S$ betyda tryck, specifik volym, absolut temperatur, till- eller bortförd värmemängd, entropi. $c_v$, $c_p$ och $R$ äro specifika värmena vid konstant volym resp. konstant tryck samt gaskonstanten.

Vi använda oss av ett $TQ$-diagram, utvisande sambandet mellan tillförd värmemängd (abscissa) och temperatur (ordinata), samt ett $\frac{1}{T}Q$-diagram, erhållet ur det förra genom utprickande av varje ordinatas inverterade värde. Det påpekas, att dessa ej äro *tillstånds*diagram, i det att olika punkter (om de blott motsvara samma $T$) kunna motsvara ett och samma tillstånd hos gasen, beroende på den väg, efter vilken tillståndet uppnåtts.

Emedan $T$ ju vanligen är = c:a 300°, och följaktligen

$\frac{1}{T} = \frac{1}{300}$, måste tyvärr olika längdenhet användas för de två diagrammens ordinator. Då det emellertid ej är fråga om numerisk räkning, torde detta icke spela någon roll.

Ända tills annorlunda säges, antages nu, att alla tillståndsförändringar ske »oändligt» långsamt, beroende på att de temperatur- eller tryckdifferenser, som förorsaka förändringen, äro »oändligt» små. Detta innebär ju, att processerna antagas vara reversibla.

I båda diagrammen utprickas en isotermisk förändring vid temperaturen $T_1$, varvid värmemängden $Q_1$ tillföres. Entropiökningen, $S_1$, skall då definieras som $\frac{Q_1}{T_1}$, d. v. s. *som ytinnehållet av den streckade rektangeln* i fig. 1. Denna definition utsträckes att gälla en godtycklig tillståndsförändring (oändligt långsam). Man konstruerar (med $TQ$-diagrammets hjälp) en kurvbåge, visande sambandet mellan $Q$ och $\frac{1}{T}$. Den yta, som ligger mellan denna båge och dess projektion på $Q$-axeln, representerar *ökningen i entropi*. Genom utsättande av pilspets kan man skilja mellan till- och bortförda värmemängder samt mellan ökning och minskning av entropien.

Fig. 1 visar även utseendet av en *isokor* ($v$ konstant); för en idealgas är den i $TQ$-diagrammet en rät linje, i $\frac{1}{T}Q$-diagrammet en hyperbelbåge. Liknande gäller om en *isobar* ($p$ konstant).

Vi bevisa nu följande sats:

*Sats A: Om ett system överföres från ett (jämvikts-)tillstånd till ett annat, så är därvid entropiförändringen oberoende av den väg, längs vilken tillståndsförändringen skett,* eller kortare uttryckt, *den nu definierade entropien är en tillståndsfunktion.*

Denna sats, som här endast bevisas för ideala gaser, gäller allmänt, men det torde falla utanför ramen för denna

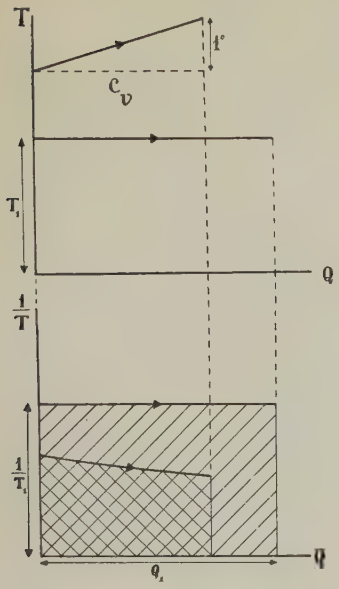



Fig. 1. Entropiökningen längs en isoterm resp. isokor.

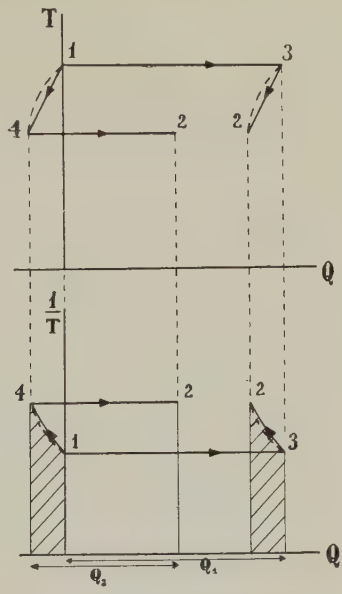



Fig. 3. $TQ$- och $\frac{1}{T}\,Q$-diagram för tillståndsförändringarna i fig. 2.

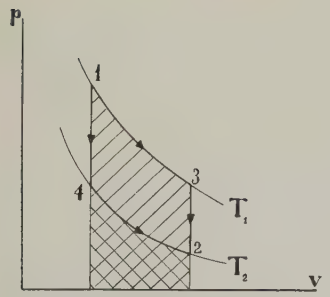



Fig. 2. Två vägar mellan tillstånden *1* och *2*. Ytorna angiva yttre arbetet.

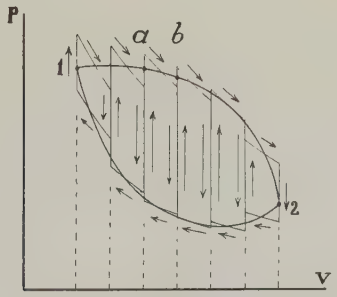



Fig. 4. Entropiändringen vid en reversibel kretsprocess är noll. De med pilar utmärkta kretsprocesserna bestå av isotermer och isokorer.

uppsats att visa övergången till det allmänna fallet — fastän denna ju kan ske utan »högre matematik».

Antag, att gasen skall överföras från tillståndet *1* till tillståndet 2 (fig. 2). Detta kan bl. a. ske antingen först längs en isoterm ($pv = RT_1$) från *1* till *3* (*1-3* = *från* tillståndet *1 till* tillståndet *3*) och sedan längs en isokor *3-2* eller också först längs en isokor *1-4* och sedan längs en isoterm ($pv = RT_2$) *4-2*. $TQ$- och $\frac{1}{T}Q$-diagrammens utseende visas av fig. 3. Av sistnämnda diagram framgår, att entropi*minskningarna* längs *1-4* och längs *3-2* äro lika stora (de båda isokorerna i $TQ$-diagrammet äro parallella, ty $c_v$ är en konstant. Detta gäller f. ö. även om $c_v$ är beroende av $T$ men oberoende av $v$; de båda entropiminskningarna representeras även då av kongruenta ytor). Entropi*ökningarna* längs isotermerna äro: $S_{1\text{-}3} = \frac{Q_1}{T_1}$ resp. $S_{4\text{-}2} = \frac{Q_2}{T_2}$. Men den värmemängd, som tillföres vid en isotermisk förändring, åtgår helt till utförande av yttre arbete. $Q_1$ och $Q_2$ förhålla sig alltså till varandra som de i fig. 2 streckade ytorna. Men då dessa förhålla sig som $T_1 : T_2$ (vid varje $v$-värde är detta ju förhållandet mellan trycken), så följer, att

$$Q_1 : Q_2 = T_1 : T_2 \text{ eller } \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \text{ d. v. s. } S_{1\text{-}3} = S_{4\text{-}2}.$$

Och därmed är visat, att entropiändringen längs båda vägarna är den samma. Satsen kan ju även formuleras så: Om gasen genomlöper *kretsprocessen 1-3-2-4-1,* blir algebraiska summan av entropiändringarna = 0.

Här påpekas, att så *icke* skulle bliva fallet, om $S$ definierades som $\frac{Q}{T^\alpha}$, $\alpha \neq 1$. Detta framgår av beviset.

Sammanbind nu punkterna *1* och 2 med två *godtyckliga* kurvor och låt gasen genomlöpa den angivna kretsprocessen (t. ex. medsols). Medelst isokorer uppdelas kurvorna i små delar, varpå isotermer inläggas som i fig. 4. Mellan två

successiva delningspunkter (t. ex. $a$ och $b$) finnas nu två vägar. Ändringen i inre energi är lika längs båda, yttre arbetet praktiskt taget likaså. Den tillförda värmemängden är således lika längs båda vägarna (på oändligt små storheter när). Inom varje intervall kan $T$ anses konstant; alltså är entropiändringen lika längs båda vägarna. Denna är således lika stor längs sicksackkurvan som längs den ursprungliga. I diagrammet åskådliggöres även en serie kretsprocesser, som, ifall de alla genomlöpas, ha samma entropiändring till resultat som sicksackprocessen. Men nyss har bevisats, att för var och en av dem är entropiändringen $= 0$. Detta gäller alltså även för sicksackprocessen och därmed för den ursprungliga processen.

Innan vi vidare undersöka entropiens egenskaper, skola vi tillämpa den funna satsen på några viktiga problem:

I. *Carnot's kretsprocess* ser i $TQ$- och $\frac{1}{T}Q$-diagrammen ut, som fig. 5 visar. Eftersom gasen återvänder till sitt ursprungliga tillstånd, måste enligt sats A algebraiska summan av alla entropiändringar vara noll, d. v. s. de streckade rektanglarna måste vara lika, varav

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Härur fås verkningsgraden (som ju f. ö. är förhållandet mellan sträckorna *1-5* och *1-2*):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

II. En annan kretsprocess, som kan tänkas vid vissa maskiner, visas av fig. 6. Från *1* till *2* tillföres värmemängden $Q_1$, varvid temperaturen höjes (t. ex. längs en isobar), från *3* till *4* bortföres $Q_2$, varvid temperaturen sänkes. Härvid gäller

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= c\,(T_2 - T_1) \\ Q_2 &= c\,(T_3 - T_4) \end{aligned}\right\},$$

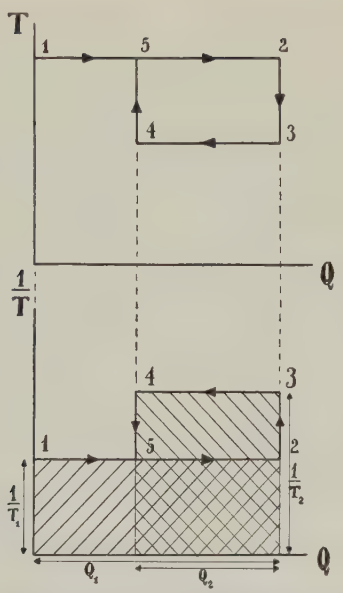



Fig. 5. Carnot's kretsprocess i $TQ$- och $\frac{1}{T}\,Q$-diagram. Punkterna *1* och *5* motsvara samma tillstånd, före resp. efter processen.

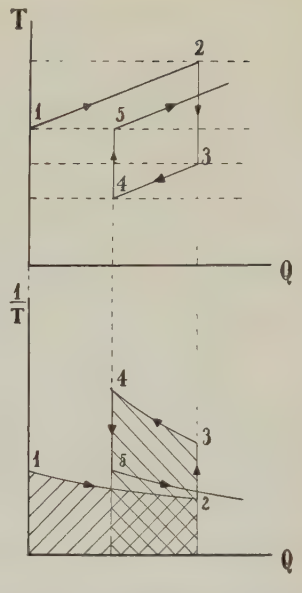



Fig. 6. Reversibel kretsprocess, där *1-2* och *3-4* äro tillståndsförändringar, vid vilka spec. värmet är konstant (event. negativt: polytropiska förändringar); *2-3* och *4-5* äro adiabater. Punkterna *1* och *5* motsvara samma tillstånd.

där $c$ = specifika värmet. *2-3* och *4-5* äro adiabatiska förändringar. — Även här skola de streckade ytorna vara lika. De kunna uttryckas approximativt, om kurvbågarna ersättas med tangenterna i deras resp. mittpunkter (svarande mot temperaturerna $\frac{T_1 + T_2}{2}$ och $\frac{T_3 + T_4}{2}$); relativa felen bli nämligen lika stora. Så erhålles

$$c \,.\, (T_2 - T_1) \,.\, \frac{2}{T_1 + T_2} = c \,.\, (T_3 - T_4) \,.\, \frac{2}{T_3 + T_4}.$$

Härur efter hyfsning samt sammansättning och fördelning:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}.$$

Men

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}.$$

$$\because \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_2}{T_3} \text{ eller } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_4}.$$

Härur verkningsgraden:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}$$

eller $$\eta = \frac{T_1 - T_4}{T_1}.$$

III. *Små, isentropiska förändringar.* Om en gas (oändligt långsamt) överföres från tillståndet *1* ($p$; $v$ — se fig. 7) till tillståndet *2* ($p + \Delta p$; $v + \Delta v$) utan värmetillförsel, har dess entropi icke förändrats. Om gasen i stället får följa vägen *1-3-2* (längs en isobar och en isokor), måste därför entropi*ökningen* längs *1-3* vara lika med entropi*minskningen* längs *3-2*. Dessa storheter beräknas liksom i föregående exempel:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= c_p \,.\, (T_3 - T_1) \\ Q_2 &= c_v \,.\, (T_3 - T_2) \end{aligned}\right\},$$

varav

$$\frac{2c_p \,.\, (T_3 - T_1)}{T_3 + T_1} = \frac{2c_v \,.\, (T_3 - T_2)}{T_3 + T_2}.$$

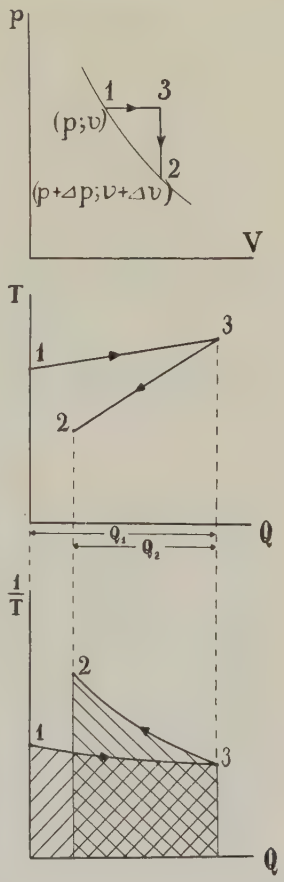



Fig. 7. Isentropisk förändring: tillstånden *1* och *2* ha samma entropi. $Q_1 - Q_2$ motsvarar ytan av triangeln *132* i $pv$-diagrammet.

Men enligt allmänna tillståndslagen är

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{v + \Delta v}{v} \text{ och } \frac{T_2}{T_3} = \frac{p + \Delta p}{p},$$

varav

$$\frac{c_p \,.\, \Delta v}{2v + \Delta v} = -\frac{c_v \,.\, \Delta p}{2p + \Delta p}.$$

Om nämnarnas $\Delta v$ och $\Delta p$ försummas, erhålles:

$$-\frac{v \,.\, \Delta p}{p \,.\, \Delta v} = \frac{c_p}{c_v}.$$

Vid integration härav erhålles isentropens ekv.

IV. *Clément-Desormes' metod* för bestämning av $\frac{c_p}{c_v}$ kan nu lätt behandlas. Gasen utvidgar sig först isentropiskt från *1* till *2* (se fig. 8) — från $(p + h;\ v)$ till $(p;\ v + \Delta v)$ — och följer sedan isokoren *2* till *3* — trycket ökas från $p$ till $p + h_1$ — tills dess temperatur är lika med dess ursprungliga; $h$ och $h_1$ äro mycket små i förhållande till $p$. Enligt exempel III är

$$\frac{v \,.\, h}{(p + h) \,.\, \Delta v} = \frac{c_p}{c_v}.$$

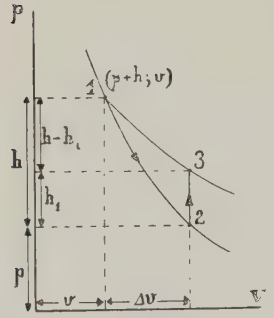



Fig. 8. »Clément-Desormes' metod»; *1-2* är en isentrop, *1-3* en isoterm.

Men om vi beakta, att linjen *1-3* är en isoterm, längs vilken $p \,.\, v$ är konstant, visas det lätt, att approximativt

$$(p + h) \,.\, \Delta v = v \,.\, (h - h_1),$$

som ger

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{h}{h - h_1}.$$

---

*Vid irreversibla processer* kan ej entropien definieras som förut; om vi inskränka oss till de fall, där sluttillståndet är ett jämviktstillstånd, kan definitionen nu modifieras därhän, att i $TQ$- och $\frac{1}{T}Q$-diagrammen avsättas, icke de *verkliga* vär-

dena på $T$ och $Q$ utan de, som svara mot någon (likgiltigt vilken) reversibel förändring med samma begynnelse- och sluttillstånd som den irreversibla. Därigenom bibehåller givetvis sats A sin giltighet.

Vi skola med ett par exempel illustrera följande sats:

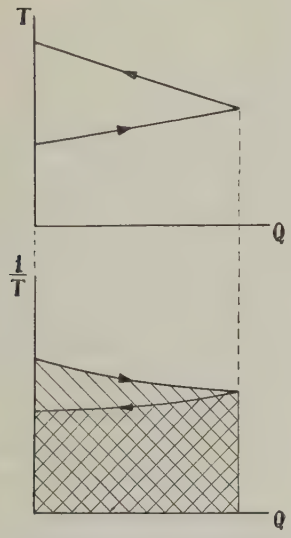



Fig. 9. Reversibla processer med samma begynnelse- och sluttillstånd som vid en irreversibel temperaturutjämning.

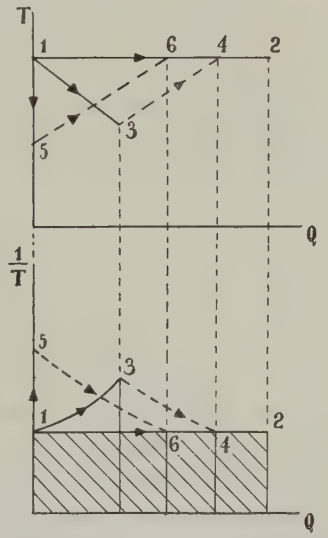



Fig. 10. *1-2* och *1-3*: reversibla processer med samma begynnelse- och sluttillstånd som vid irreversibla, adiabatiska tryckutjämningar, *utan* resp. *med* uträttande av yttre arbete; *1-5*: isentrop.

*Sats B: Inom varje (utåt värmeisolerat) system strävar entropien att ökas.*

Såsom första exempel taga vi det fall, då systemet utgöres av två kroppar med olika temperatur. Vid *temperaturutjämningen* avgiver den varmare kroppen värme, varvid dess entropi minskas, medan den kallare kroppen mottager värme och dess entropi ökas. Av fig. 9 framgår, att ökningen alltid är större än minskningen, d. v. s. att temperaturutjämningen är sammanknuten med en ökning av systemets entropi.

Såsom exempel på *tryckutjämning* ta vi en (ideal) gas, som utan värmetillförsel utvidgar sig *utan att uträtta yttre arbete.* Man tänker sig därvid två behållare, den ena innehållande gas och den andra lufttom, förbundna medelst ett rör med stängd kran. Då kranen öppnas, förrättas intet arbete. Gasens temperatur håller sig då konstant. I diagrammen (fig. 10) måste införas den värmemängd (*1-2*), som skulle tillförts, om processen varit isotermisk och reversibel (och som då skulle åtgått till det yttre arbetet). Då entropien sålunda ökas, finna vi, att även tryckutjämning är förbunden med ökning av entropien.

Då de båda anförda processerna ju *ej utan yttre ingripande* kunna fås att förlöpa »baklänges», ha vi i dessa båda gränsfall verifierat sats B.

Samma sluttillstånd som i sist anförda exempel kunde ha erhållits på annat sätt. Gasen expanderar *isentropiskt* till den önskade volymen (*1-5*), varvid yttre arbete utföres. *Därefter* tillföres vid konstant volym (*5-6*) en värmemängd, ekvivalent med det uträttade arbetet, så att temperaturen återfår sitt ursprungliga värde. — Eller också kunde gasen ha expanderat irreversibelt utan värmetillförsel under uträttande av ett arbete (mindre än det längs isentropen uträttade), *varefter* en härmed ekvivalent värmemängd tillföres (*3-4*) vid konstant volym. I alla dessa angivna fall är likväl entropiökningen densamma, enligt vad som fordras av definitionerna och sats A.

Detta medgiver f. ö. beräkning (eller grafisk bestämning) av koordinaterna (*Q* och *T*) för punkten *3.*

Slutligen påpekas än en gång, att linjerna *1-2* och *1-3* utvisa de reversibla processer, som ha samma resultat som motsvarande irreversibla; under de sistnämnda antogs ju ingen värmetillförsel äga rum.

Sats B får därmed anses vara tillräckligt illustrerad.

---

# Den positiva elektronen.

Av ARVID LEIDE.

## *Inledning.*

Upptäckten av den positiva elektronen gjordes i samband med undersökningen av den kosmiska strålningen, som utifrån tränger ned i troposfären och vars natur man ännu icke kunnat med säkerhet fastställa.

Ett karakteristiskt fenomen hos denna strålning är en periodiskt uppträdande, synnerligen kraftig jonisering, tydande på en sekundäreffekt med oerhörd energi. Den har på många håll undersökts, och redan 1929 fastställde Bothe och Kolhörster, att »en utomordentligt genomträngande korpuskularstrålning härvid spelar en avgörande roll, såvida icke strålningen helt och hållet är av korpuskulär natur». Andra forskare, bl. a. Kunze och Skobelzyn, funno sekundärstrålningen bestå av elektroner med en energi vida överträffande de snabbaste $\beta$-strålarnas. I deras arbeten har man åter fått ett belägg på, vilket utomordentligt instrument för atomforskningen wilsonkammaren utgör. En sådan kammare placerades mellan polerna på en elektromagnet, så att det homogena fältets riktning sammanföll med kammarens axelriktning, man mätte dimspårets krökning och kunde sedan beräkna partikelns energi. Då denna energibestämning är det viktigaste hjälpmedlet man har för tolkning av dimspåren på wilsonfotografierna och därför spelar en stor roll i fortsättningen, är det nödvändigt att ge en kort resumé över tillvägagångssättet.

Enligt den bekanta relationen mellan energi och massa, $E = mc^2$, kan man skriva $E_k = mc^2 - m_0c^2$, där $E_k$ betyder partikelns kinetiska energi, $m_0$ vilomassan, $m$ massan vid hastigheten $v$ och $c$ ljushastigheten.

Mellan $m$ och $m_0$ råder sambandet $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, där $\beta = \frac{v}{c}$.

Sätter man här in de kända data för elektronens vilomassa och ljushastigheten, erhålles

$$E_k = 8{,}12 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),$$

där energien är uttryckt i erg.

Sedan gammalt angiver man dock hellre elektronens energi genom det bromsande elektriska fältets potentialdifferens, uttryckt i volt och får då relationen

$$eV = 8{,}12 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

eller, om $e$ sättes = elektronens laddning i elektro-magnetiska C.G.S.-enheter och $V$ volt reduceras till samma enheter:

$$V = 5{,}11 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

volt/elektron eller elektronvolt (e-volt), såsom enheten vanligen kallas.

$\beta$ bestämmes ur elektronens avböjning i magnetiskt fält. Om $H$ är magnetfältets styrka och $\varrho$ elektronbanans krökningsradie, gäller enligt den välbekanta härledningen

$$evH = \frac{mv^2}{\varrho} \quad \text{eller} \quad H\varrho = c \cdot \frac{m}{e} \cdot \beta,$$

varur genom användande av sambandet mellan $m$ och $m_0$ erhålles

$$H\varrho = c \cdot \frac{m_0}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}}$$

och

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(H\varrho)^2} \cdot \left(\frac{cm_0}{e}\right)^2}}.$$

Sättes detta värde på $\beta$ in i uttrycket för $V$, erhålles slutligen

$$V = 5{,}11 \cdot 10^5 \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{(H\varrho)^2}{2{,}89 \cdot 10^6}} - 1 \right), \text{ där } 2{,}89 \cdot 10^6 = \left( \frac{c \cdot m_0}{e} \right)^2$$

och för protonen på liknande sätt:

$$V = 9{,}41 \cdot 10^8 \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{(H\varrho)^2}{9{,}85 \cdot 10^{12}}} - 1 \right), \text{ där } 9{,}85 \cdot 10^{12} = \left( \frac{c \cdot m_0}{e} \right)^2.$$

För stora värden på $H\varrho$ blir relationen mellan $V$ och $H\varrho$ approximativt lineär och $H\varrho$ kan användas för att angiva partikelns energi.

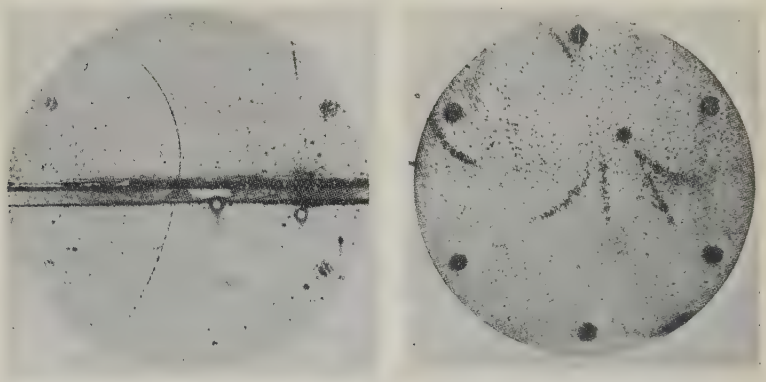
### *Den positiva elektronens upptäckt.*

I de nämnda undersökningarna av sekundärstrålningen ansåg man sig icke ha anledning att närmare undersöka partiklarnas natur utan förutsatte, att de voro elektroner av vanligt slag, ehuru med ovanligt hög energi. En medarbetare till Millikan, Carl D. Anderson, kom emellertid på den lyckliga tanken att bestämma partiklarnas rörelseriktning med hjälp av en blyplatta, som placerades längs diametern i wilsonkammaren. En partikel, som trängde genom plattan, led en energiförlust, vilket medförde, att krökningen hos dimspåret ändrades. I sept. 1932 meddelade han i Science i största korthet, att han funnit dimspår, som måste förutsätta existensen av positivt laddade partiklar av elektronens massa och i Phys. Rev. för mars 1933 lämnade han en utförlig redogörelse, åtföljd av fotografier, bl. a. de som här visas i fig. 1.

Bilderna visa wilsonkammarens cirkulära kontur. Kammaren var uppställd med de plana sidoytorna vertikala; den kosmiska strålningen genomträngde cylinderväggen uppifrån. Ett magnetfält på 15 000 gauss hade anbragts med riktning rakt inåt mot papperets plan. Längs kammarens diameter går den 6 mm tjocka blyplattan, med vars hjälp rörelse-

riktningen skulle bestämmas. Fig. 1 a visar ett spår av samma typ som ett vanligt elektronspår. För spåret under plattan är $H\varrho = 2{,}1 \cdot 10^5$ gauss-cm, motsvarande en energi på 63 millioner elektronvolt, om massan antages vara lika med den vanliga elektronmassan, och över plattan är $H\varrho = 7{,}5 \cdot 10^4$ gauss-cm och energin 23 millioner e-volt.

Det finns olika möjligheter att tolka bilden. Man lägger först och främst märke till, att spårets båda hälfter bilda



*a* *b*

Fig. 1. *a*. Spår i wilsonkammaren av en positron med rörelseriktning nedifrån uppåt; *b*. Spår av elektroner och positroner i wilsonkammaren, enl. Carl D. Anderson.

en omedelbar fortsättning på varandra och tydligen äro alstrade av en och samma partikel, som genomtränger plattan. Möjligheten av att i samma ögonblick — av spårens bredd att döma med ett tidsintervall av mindre än 1/50 sek. — två olika elektroner skulle alstrats, vilka rört sig så, att spåren ge intryck av att vara ett sammanhängande, måste av sannolikhetsskäl uteslutas. Om partikeln vore en elektron, måste dess rörelseriktning gå uppifrån-nedåt. Den skulle då ha accelerats inom blyplattan utan riktningsändring, vilket måste anses uteslutet. Då återstår endast möjligheten, att spåret härrör från en positivt

laddad partikel. Man skulle då i första hand tänka på den lättaste av de förut kända, protonen, men den möjligheten måste av flera skäl avvisas. Först och främst har dimspåret elektronspårets typ och visar icke protonspårets massiva jonlinje. En bestämning av spec. joniseringen gav som första resultat, att massan vore högst 20 ggr större och laddningen högst 2 ggr större än motsvarande värden för elektronen. Protonen har ju däremot 1846 ggr större massa än elektronen. Om man slutligen ur värdet på $H\varrho$ bestämde, vilken energi en sådan proton skulle ha, fick man värdet c:a 300 000 e-volt, vilket skulle motsvara en räckvidd på 5 mm. I själva verket var räckvidden mer än 10 ggr större. Den observerade energiförlusten per cm i blyplattan stämde däremot bra med vad man borde vänta, om massan antoges lika med elektronmassan. Det återstod då intet annat än att tyda spåret såsom härrörande från en positiv motsvarighet till elektronen. Anderson införde namnen positron och negatron. I litteraturen användes sällan namnet negatron, man talar om positroner och elektroner.

Av de övriga fotografierna i Andersons arbete meddelas här fig. 1 b, som visar ett samtidigt uppträdande av en positron och en elektron, utslungade från en punkt i kammarens vägg. De bilda tillsammans med två oböjda spår mittgruppen i bilden. (De oböjda spåren kunde Anderson icke förklara.) Sådana »tvillingar» förekomma ofta på wilsonfotografier av positroner och ha fått stor betydelse i de teoretiska överläggningarna över positronens natur.

Någon vecka före Andersons senare redogörelse kom en utförlig avhandling om den kosmiska strålningens sekundärstrålning av Blackett och Occhialini [1] från Cavendishlaboratoriet i Cambridge. Ett stort antal wilsonfotografier åtföljde avhandlingen och bekräftade fullständigt Andersons resultat. Deras apparatur är schematiskt framställd i fig. 2. Wilsonkammaren placerades med de plana ytorna verti-

[1] Proc. Roy. Soc. **139**, 1933, p. 699.

kala och med två Geiger-Müllers räknerör [1] ställda, ett över och ett under kammaren. En stråle, som gick genom båda rören, passerade också genom den belysta delen av kammaren. Räknerören kopplades till en förstärkningskrets på ett sådant sätt, att endast samtidiga urladdningar registrerades. Genom en sinnrik anordning sköttes automatiskt kolvens rörelse i kammaren — och därmed också expansionen — av strömmen från förstärkningskretsen. Den

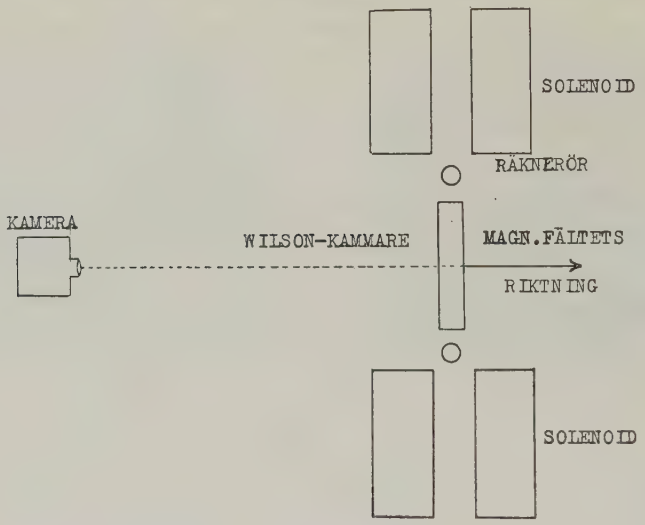
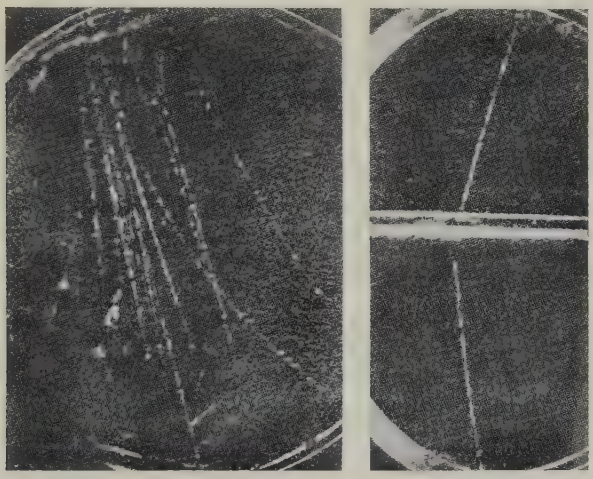



Fig. 2. Schema över Blackett-Occhialinis försöksanordning.

stråle, som skulle fotograferas, fick själv utlösa expansionen liksom även belysningen. Man behövde alltså icke fotografera på måfå, och fördelen visade sig också däri, att spår av partiklar med hög energi erhöllos på över 75 % av fotografierna. En nackdel var emellertid, att joniseringen hade skett redan före expansionen, då den vid vanlig wilsonfotografering huvudsakligen sker under densamma. Jonerna

[1] Beträffande räknerörets princip och användning hänvisas till en uppsats av F. Lindholm: »Den genomträngande kosmiska strålningen» i Kosmos 8, 1930, p. 106.

hunno diffundera åtskils något, innan expansion och belysning kom. Spåren förlora därför i skärpa men möjliggöra dock mätningar med acceptabel noggrannhet. Belysningen alstrades genom urladdning från en 4000-volts transformator genom en kapillär-kvicksilverlampa. Hela kammaren placerades i en vattenfylld solenoid, som kunde ge ett homo-



*a* *b*

Fig. 3. *a*. Spår av elektroner (avböjda åt vänster) och positroner (avböjda åt höger). *b*. Spår av en positron, som erfarit riktningsändring och energiminskning i en blyplatta, enl. Blackett-Occhialini.

gent magnetfält på 3000 gauss. Spåren dubbelfotograferades, så att man kunde rekonstruera deras lägen i rymden. Genom att låta strålningen passera genom skivor av Cu, W och Pb kunde man studera växelverkan mellan strålning och materia.

Fig. 3 är hämtad från detta arbete; 3 a visar en hel kvast på 16 spår, tydligen härstammande från en eller två punkter i solenoidens kopparmassa. Till vänster två elektroner, till höger två positroner. Spåren äro i båda fallen av fullständigt samma typ. Man kunde mäta minimumkrökning på 1°, motsvarande en krökningsradie på 500 cm. Med fält-

styrkan 3000 gauss blir $H\varrho = 1{,}5 \cdot 10^6$ gauss-cm, motsvarande en elektronenergi på 300 mill. volt. De icke avböjda strålarna representera alltså en ännu högre energi. Då man på vissa plåtar kunde se över 20 sådana spår, tydligen sammanhörande, kan man kanske häri se förklaringen till de för den kosmiska strålningen karakteristiska starka joniseringsstötarna.

Fig. 3 b visar en positron, som erfarit riktningsändring och dessutom energiminskning i en 4 mm tjock blyplatta. En proton med samma värde på $H\varrho$ skulle ha haft en räckvidd på 1,5 cm. Här är räckvidden över 5 cm.

Genom dessa arbeten kan positronens existens anses vara säkerställd. Visserligen har man icke med säkerhet kunnat fastställa, att massa och laddning överensstämma med elektronens, men spårens utseende och spec. jonisering gör detta sannolikt. De senaste undersökningarna ha ökat sannolikheten. Genom att låta positronen passera superponerade elektriska och magnetiska fält, kunde Thibaud [1] visa, att $e/m$ för positronen ligger mellan 2 och $^1/_2$ ggr motsvarande värde för elektronen och i nya, noggrannare mätningar över den spec. joniseringen för positroner och elektroner med såväl stora som små värden på hastigheten finner Anderson,[2] att positronen med avseende på laddningen skiljer sig högst 10% och med avseende på massan högst 20% från elektronen.

Varför har då positronen så länge undandragit sig upptäckt? Härpå kan olika svar givas beroende på om man uppfattar positronen som en beständig eller obeständig partikel, och den frågan är ännu icke klar. Om den är beständig, kan man tänka sig, att den omedelbart förenar sig med en neutron och bildar en proton. Som senare skall visas, har man ett visst experimentellt stöd för denna uppfattning. Blackett och Occhialini antogo emellertid, i anslutning till Dirac, att positronen är obeständig. Enligt Dirac bör det

[1] C. R. **197** 1933, p. 915; Phys. Rev. **45** 1 juni 1934.
[2] Nature **133** 3 mars 1934; Naturwiss. **22** 11 maj 1934.

finnas elektroner med negativ energi likaväl som elektroner med positiva energivärden, men vi märka dem icke, därför att vi äro omgivna av en kontinuerlig fördelning — en »eter» — av sådana elektroner. Men om, av någon anledning, en sådan elektron övergår till ett tillstånd av positiv energi, så märka vi icke endast elektronen utan också det »hål», den lämnar efter sig, och detta hål ter sig för oss som en partikel med elektronens massa men med positiv laddning. En positron och en elektron böra därför alstras samtidigt, och man har ju också i många fall observerat sådana »tvillingar». Blackett och Occhialini menade, att den yttre anledningen kunde vara stöt av en foton mot en kärna, varvid fotonens energi ger upphov till ett positron-elektron-par eller med andra ord, man skulle här ha att göra med en *materialisation av ljus,* ett begrepp som astronomerna redan opererat med.

Vid alla de fall av växelverkan mellan fotoner och materia, som man hittills lärt känna, ha lagarna om laddningens, impulsens och energiens konstans gällt, och det är därför av särskilt intresse att undersöka, om de även gälla här.

*Laddningen* blir tydligen konstant, om — såsom ju är sannolikt — positron och elektron ha lika stor laddning, fastän med motsatt tecken. De fall av enstaka positroner som observerats, söker man tolka så, att energien fördelats ojämnt, varför endast positronen kunnat göra sig märkbar, men båda ha alstrats. Om en hel kvast av sekundärpartiklar bildas, så böra positroner och elektroner förekomma i lika antal. På denna punkt har experimenten ännu icke givit full klarhet. Blackett och Occhialini hade alltför svaga magnetfält för att kunna avböja alla partiklarna, under det att Anderson i sina senaste mätningar (Nature mars 1934) finner en asymmetrisk fördelning mellan antalet positroner och elektroner.

Av alla partiklar är fotonen den, som för en given energi har största *impuls.* För fotonen är nämligen impulsen (pro-

dukten mellan massa och hastighet) $= \frac{h\nu}{c^2} \cdot c$ och energien $h\nu$. Förhållandet mellan impuls och energi blir alltså $\frac{1}{c}$. För en materiell partikel med massa $m$ och hastighet $v$ blir impulsen $mv$ och energien $mc^2$, d. v. s. förhållandet mellan impuls och energi blir här $\frac{v}{c} \cdot \frac{1}{c}$ och således mindre än i förra fallet, eftersom $\frac{v}{c}$ är mindre än 1. Av detta framgår, att en materialisation icke kan ske i vakuum utan måste ske i materiefyllt rum genom växelverkan med en kärna (eller möjligen elektron), som kan upptaga impulsöverskottet.

Vad slutligen *energien* beträffar, så kan man enligt relationen $E = mc^2$ beräkna, att $^1/_2$ million elektronvolt erfordras för att alstra elektronens vilomassa och således 1 million för ett elektron-positron-par. Den kosmiska strålningen representerar energivärden av betydligt högre storhetsordning, så att numeriskt sett intet hinder finns, för att teorien skulle kunna vara riktig. Någon experimentell prövning kan man dock icke göra, eftersom den kosmiska strålningens energi icke med säkerhet är känd.

Anledningen till att positronen icke tidigare upptäckts är enligt Dirac, att dess livslängd är kort, av storleksordningen $10^{-10}$ sek. Då den stöter på en elektron, kan den, jämte elektronen, *dematerialiseras* och ger upphov till ett eller under vissa förhållanden två ljuskvanta. Även här måste en materiell kropp deltaga för att ge den impulsökning, som är nödvändig för fotonalstringen. I materiefyllt rum är positronen således obeständig men i vakuum beständig.

### *Positronalstring genom γ-strålar.*

Av flera skäl vände man sig till $\gamma$-strålarna såsom källa för positroner. Blackett och Occhialini fäste uppmärksamheten på en egendomlig diskrepans mellan teori och experi-

ment vid $\gamma$-strålningens absorption i materia. Problemet har teoretiskt behandlats på flera håll; den formel, som uppställts av Klein och Nishina, svarar bäst mot experimenten. Flera forskare (bl. a. Gray och Tarrant, Meitner och Hupfeld) påvisade dock, att formeln gav bristande överensstämmelse, särskilt framträdande vid tunga atomer och hård $\gamma$-strålning. De senare, vilkas apparatur gav möjlighet att hålla mätfelen inom 5%, konstaterade avvikelser under de nämnda omständigheterna upp till 30%. Denna märkliga absorptionsökning skulle, helt eller delvis, kunna förklaras, om man antoge, att energi åtgick till att alstra ett elektron-positron-par.

Vidare hade Curie och Joliot vid försök med neutroner från Be observerat dimspår, som tolkas som snabba elektroner, vilka egendomligt nog rörde sig mot strålningskällan. De skulle nu kunna tolkas som positroner, alstrade av de hårda $\gamma$-strålar, som uppkomma tillsammans med neutronerna.

De viktigaste resultaten ha vunnits, i Amerika av Anderson och Neddermeyer,[1] i England av Chadwick-Blackett-Occhialini,[2] i Tyskland av Meitner-Philipp[3] och i Frankrike av Curie-Joliot[4] samt Thibaud.[5] De oftast mycket summariska rapporterna ha kommit i snabb följd. Försöksanordningen är i de olika fallen liknande: man låter hårda $\gamma$-strålar falla på ett substansskikt. Fotonerna utlösa först och främst talrika löst bundna elektroner (Comptonelektroner). Undersöker man emellertid de utslungade partiklarna i en wilsonkammare med axialt magnetfält, så erhåller man, utom elektroner, talrika spår av positroner, även här med dimspår av samma typ som elektronernas, men böjda åt motsatt håll.

Som strålningskälla har man använt Po ($h\nu = eV = 0{,}8 \cdot 10^6$ elektronvolt), Ra C ($1{,}5 \cdot 10^6$ e-volt), Th C″ ($2{,}6 \cdot 10^6$

[1] Phys. Rev. **43** 1933, p. 1034.
[2] Nature **131** 1933, p. 473.
[3] Naturw. **21** 1933, p. 286.
[4] C. R. **196** 1933 flera uppsatser.
[5] C. R. **197** 1933, p. 915.

e-volt) samt slutligen den hårda $\gamma$-strålning ($5 \cdot 10^6$ e-volt), som jämte neutroner bildar den s. k. Berylliumstrålningen.

Då fotonens energi här var känd, fick man möjlighet att pröva lagen om energiens konstans vid den förmodade energi-materialisationen. *Elektron-positron-parets sammanlagda kinetiska energi måste ha ett maximumvärde, 1 million elektronvolt mindre än fotonens energi.* Undersöker man en enstaka positron, så får dess energi icke heller överstiga detta max.-värde.

Resultaten kunna i korhet sammanfattas så:

Po-strålningen kunde enl. Meitner-Philipp icke utlösa några positroner. Detta stämde väl med teorien, då fotonens energi här är mindre än 1 mill. elektronvolt. I alla övriga fall erhöllos positroner; utbytet blev allt rikare, ju hårdare $\gamma$-strålningen var och ju tyngre atomkärnorna voro. För Ra C fann Grinberg[1] max.-värdet $0{,}5 \cdot 10^6$ e-volt, för Th C'' fann Anderson-Neddermeyer samt Meitner-Philipp vid mätning på enstaka positroner max.-energien $1{,}6 \cdot 10^6$ e-volt. A.-N. undersökte dessutom 13 elektronpar och fann i 12 fall energivärden mellan $1{,}0 \cdot 10^6$ och $1{,}6 \cdot 10^6$ e-volt. Endast i ett fall funno de $1{,}8 \cdot 10^6$ e-volt, men anse själva detta värde osäkert. Curie-Joliot fingo betydligt lägre värden, för par maximalt $0{,}8 \cdot 10^6$ e-volt. I sin senaste publikation meddelar Anderson resultatet av energimätningar på icke mindre än 2500 spår av par samt enstaka positroner och elektroner, utslungade från Pb, Al och C; $\gamma$-strålningen kom från Radiumthorium och filtrerades genom en 2,5 cm tjock blyplatta, så att den effektiva strålningen motsvarade en energi på $2{,}6 \cdot 10^6$ e-volt. På ett undantag när visade såväl de enstaka positronerna som paren energimaximum vid $1{,}6 \cdot 10^6$ e-volt. I ett fall observerade han ett par med energien $2{,}9 \cdot 10^6$ e-volt och anför som en tänkbar, fast kanske icke sannolik förklaring, att detta par blivit utlöst av en kosmisk stråle.

[1] C. R. **197** 1933, p. 318.

Även för Be-strålningen passa resultaten någorlunda in, ehuru siffermaterialet här är ganska magert.

Man kan alltså som sammanfattning säga, att oberoende av riktigheten av Diracs teori f. ö., experimenten ganska väl stöder teorin om fotonens materialisation i form av ett positron-elektron-par. Det är emellertid långt ifrån säkert, att detta är det enda sättet för framställning av positroner. Anderson fann nämligen, att från Pb utlöstes 96 positroner mot 59 par och från Al 20 positroner mot 7 par. Detta resultat är svårt att förena med tanken, att positroner och elektroner alltid uppträda i par.

Den *dematerialisation* av ett elektron-positron-par under utsändande av två ljuskvanta på $0{,}5 \cdot 10^6$ e-volt eller under vissa omständigheter ett på $1{,}0 \cdot 10^6$ e-volt, som Diracs teori kräver, har också gjorts till föremål för experimentell prövning, och man har sökt påvisa motsvarande komponenter i den spridda strålningen från det substansskikt, som bestrålats med $\gamma$-strålarna, genom bestämning av absorptionskoeff. i bly. Gray och Tarrant [1] funno både komponenterna, Joliot [2] endast den mjukare och dessutom en svag komponent på $0{,}64 \cdot 10^6$ e-volt. Thibaud samt Heiting [3] funno även den mjuka komponenten. Däremot ställde sig Meitner-Hupfeld [4] och Bothe-Horn [5] mycket tveksamma, och de senare riktade en allvarlig kritik mot de av övriga forskare erhållna resultaten. Senare har Anderson [6] vid sina fortsatta mätningar över kosmisk strålning funnit — vid sidan om energirika sekundärpartiklar, positroner och elektroner — även sekundära fotoner med en energi av den storhetsordning, det här är fråga om. Han vågade dock icke draga slutsatsen, att de uppkommit genom dematerialisation. Mindre tveksamma äro däremot i sina senaste arbeten Joliot [7] och Thibaud.[8] De framställde positroner enligt ett

[1] Proc. Roy. Soc. **136** 1932, p. 662.
[2] C. R. **197** 1933, p. 1622.
[3] Z. f. Ph. **87** 1933, p. 127.
[4] Z. f. Ph. **75** 1932, p. 705.
[5] Naturwiss. **22** 1934, p. 106.
[6] Nature **133** 3 mars 1934.
[7] C. R. **198** 1934 p. 81.
[8] C. R. **198** 1934 p. 562.

nytt sätt, som i följande avdelning närmare behandlas, nämligen genom att bombardera ett aluminiumblad med $\alpha$-partiklar. Positronerna absorberades — hos Joliot i bly eller aluminium, hos Thibaud i platina — och därvid observerades en $\gamma$-stråleemission, vars absorptionskoefficient i bly bestämdes. Härav kunde de beräkna energien och fann den i båda fallen väl överensstämma med det enligt Diracs teori fordrade värdet $0{,}5 \cdot 10^6$ e-volt. Slutligen bör här nämnas ännu ett resultat, som ger nämnda teori ett stöd, nämligen Savel's.[1] Denne fann, att det aluminiumblad, som bombarderades med $\alpha$-partiklar utom positroner, även utsände $\gamma$-strålar. Ur den uppmätta absorptionskoefficienten i bly bestämde han energien $0{,}55 \cdot 10^6$ e-volt.

*Positronalstring genom sprängning av lätta atomkärnor.*

Denna metod, som upptäckts av Curie-Joliot,[2] är den, som hittills lämnat det rikligaste utbytet. De läto $\alpha$-strålar från ett Po-preparat på 60 millicurie bombardera ett skikt av Be, B eller Al. Den emitterade strålningen undersöktes i en wilsonkammare med axialt magnetfält, och resultatet var så gott, att praktiskt taget varje expansion gav ett positronspår. Upptäckarna tolkade sitt resultat så, att positronerna vid Be uppkommo som en följd av en intern dematerialisation men vid B och Al som en följd av atomernas sprängning. I dessa senare fall utsändas även neutroner. Liknande resultat uppnåddes även vid Mg; observationerna äro dock icke fullt säkra.

Denna framställningsmetod låter sig icke lätt förena med Diracs uppfattning om positronens snabba dematerialisation. Här är det naturligare att tänka sig positronen som en beständig partikel och del av atomkärnan. Detta skulle leda till uppfattningen om neutronen som en elementarpartikel och protonen som en neutron + en positron. De fortsatta

[1] C. R. **198** 1934 p. 368.

[2] C. R. **196** 1933, p. 1105 m. fl.; J. de Phys. **4** 1933, p. 494.

undersökningarna [1] ha icke tillåtit ett avgörande i denna fråga men ha i annat avseende gett ytterst märkliga resultat. Positronemissionen varade nämligen under en längre eller kortare tid — hos B mer än en halvtimma — efter det bestrålningen med $\alpha$-partiklar upphört, och dess intensitet avtog med tiden enligt en exponentialfunktion alldeles som strålningen från de radioaktiva elementen. Vid Al bestämdes halveringstiden till 3 min. 15 sek., vid B till 14 min. och vid Mg till 2 min. 30 sek. Experimenten ge vid handen, att det finns en ny, hittills obekant typ av radioaktivitet och man har för första gången kunnat visa, att radioaktivitet kan skapas hos vissa atomkärnor, och att den kan fortsätta under en mätbar tid sedan den skapande orsaken upphört att verka.

Fig. 4. Elektron-Positron-par, alstrat i wilsonkammarens gas, enl. Curie-Joliot.

Curie och Joliot tänkte sig förloppet vid Al enligt följande schema:

$$_{13}Al^{27} + {}_{2}He^{4} = {}_{15}P^{30} + {}_{0}n^{1}$$

d. v. s. Al-kärnan upptager en $\alpha$-partikel och övergår under utsändande av en neutron till en isotop av fosfor, $_{15}P^{30}$, som är radioaktiv och sönderfaller med en halveringstid av 3 min. 15 sek. under emission av positroner enl. schemat:

$$_{15}P^{30} = {}_{14}Si^{30} + {}_{1}\overset{+}{\varepsilon}^{0}.$$

Ett motsvarande schema för B och Mg ger resultatet, att vid B kväveisotopen $_{7}N^{13}$ och vid Mg kiselisotopen $_{14}Si^{27}$ utgör den positronstrålande radioaktiva beståndsdelen.

[1] C. R. **198** 1934 p. 254.

I ett senare arbete [1] kunde Curie och Joliot meddela, att de funnit sina antagande fullt bekräftade och att de t. o. m. kunnat isolera de radioaktiva isotoperna, för vilka de föreslå namnen radiokväve, radiofosfor och radiokisel.

Deras resultat ha, naturligt nog, väckt stor uppmärksamhet, och på många håll har man skyndat sig att göra om försöken för att kontrollera dem och för att finna nya experimentella fakta. En hel litteratur har hunnit växa fram. I stort sett ha de av Curie och Joliot vunna resultaten bekräftats, och man har lyckats påvisa sådan »konstgjord radioaktivitet» vid ett stort antal andra element och även i några fall kunnat isolera den radioaktiva beståndsdelen och bestämma dess halveringstid. Det skulle emellertid falla utanför uppsatsens ram att i detalj redogöra för dessa arbeten.

[1] C. R. **198** 1934 p. 559.

---

## Astronomisk åskådningsmateriel.

Av **ALGOT JENVALL.**

Det brukar räknas såsom en riktig pedagogisk princip, att man vid genomgången av en lärokurs börjar med det enklaste och först därefter går in på mera invecklade saker. Det enda tillfälle, då den motsatta metoden användes vid våra skolor, är vid den korta lärokursen i astronomi. Man brukar där börja med den dagliga skenbara rörelsen, och denna är ju ganska komplicerad, i varje fall bra mycket mera invecklad än planetrörelsen sedd från heliocentrisk synpunkt.

Meningen med denna metod, som är föreskriven i den gamla läroverksstadgans metodiska anvisningar, är ju, att lärjungarna först skola göras förtrogna med de astronomiska företeelser, som de själva kunna observera på himlavalvet, innan de erhålla förklaringen på desamma. Var och en, som undervisat i astronomi, känner väl till svårigheten med

denna metod. På grund av den korta tid, som är anslagen åt astronomiundervisningen, händer det alltför ofta, att det är omöjligt att samla klassen till direkta observationer. Skola sådana observationer göras, måste de utföras i god tid före astronomikursens början och i regel redan i början av höstterminen. För att observationerna skola bliva av något värde, måste de dessutom genomgås och diskuteras i klassen, varvid den övriga fysikkursen gång efter annan lider avbräck.

Resultatet har nog tyvärr ofta blivit, att de praktiska övningarna och observationerna i astronomi inskränkts till ett minimum. Istället ha eleverna efter vederbörlig preparation fått den ena delen efter den andra om den dagliga rörelsen i läxa. Såsom åskådningsmaterial i skolan har man i bästa fall haft att tillgå Sohlbergs himmelssfär eller någon liknande apparat. — För egen del anser jag, att denna apparat hör till de mera svårförståeliga. Åskådaren tvingas att betrakta himlavalvet utifrån och skall sedan försöka tänka sig placerad mitt inne i apparaten. Den lämpar sig i varje fall knappast att användas vid den första undervisningen i astronomi. — Sedan den dagliga skenbara rörelsen blivit genomgången, har turen kommit till den heliocentriska rörelsen, och därefter har tiden knappast tillåtit någon ny genomgång av den skenbara rörelsen, för att denna skall få sin förklaring ur heliocentrisk synpunkt.

De läroverkssakkunniga ha i sitt betänkande av år 1932 föreslagit något ändrade bestämmelser rörande de metodiska anvisningarna för astronomiundervisningen, och den nya läroverksstadgan kommer med all sannolikhet att lämna läraren fria händer vid val av undervisningsmetod. Då den gamla metoden ej kan sägas ha varit ur alla synpunkter särskilt lämplig, kan man därför taga i övervägande, om man ej vid astronomiundervisningen bör förfara såsom vid undervisningen i andra ämnen, nämligen börja med det enklaste. En obestridlig fördel har man i så fall däri, att man kan få bygga på vad alla eleverna väl känna till redan

från första årskursen i geografi, nämligen att jorden är en himlakropp, som är klotformig eller nästan klotformig, och som vrider sig runt kring sin egen axel på ett dygn och på ett år går runt solen. Beträffande lärjungarnas förkunskaper rörande den dagliga skenbara rörelsen kan man nog förutsätta, att de veta, att solen går upp i öster och ned i väster, och det finns knappast någon, som inte känner till Polstjärnan. Några stjärnbilder bruka de också känna till. Huvudvikten vid kursen bör i så fall läggas på den kopernikanska världsåskådningen och dess konsekvenser rörande den dagliga skenbara rörelsen. — Vad man skulle vinna är först och främst tid. Man slipper såsom hittills gå igenom den skenbara rörelsen två gånger, en gång för inhämtandet av själva rörelsen och en gång för dess förklaring ur heliocentrisk synpunkt. Vidare har man större möjligheter beträffande de praktiska observationerna, då dessa förläggas under och efter astronomikursen och slutligen den kanske ej minsta fördelen — man har möjligheten att vid undervisningen redan från början använda för eleverna lättbegripligt åskådningsmaterial. På senaste tid har i handeln utkommit en del apparater, som äro synnerligen lämpliga för detta ändamål, och som jag i det följande vill beskriva.

## Gyrotelluriet.

Apparaten åskådliggör på ett synnerligen överskådligt och lättfattligt sätt jordens rörelse kring solen och är på grund av sin enkla konstruktion mycket överlägsen det vanliga telluriet. Den består av ett vitmålat träklot, föreställande jorden; på detta är ekvatorn markerad med en svartmålad ring. Konstruktionen i övrigt framgår av fig. 1. På mitten av den halvcirkelformade mässingsbygeln är fästat ett cirka 3 m långt, flätat snöre, medelst vilket apparaten kan fästas vid en krok i taket. Klotet befinner sig då i indifferent jämvikt. Sättes detsamma i hastig rotation omkring sin axel, vilket sker på samma sätt som vid ett vanligt gyroskop genom ett snöre, som lindas runt den

fria delen av klotets axel, så kommer rotationsaxeln på grund av gyroskopverkan att bibehålla samma riktning, så länge rotationen är tillräckligt hastig.

Genom att placera en lampa, föreställande solen, i nivå med gyrotelluriet rakt under upphängningspunkten i taket och låta apparaten svänga såsom en konisk pendel runt densamma får man en enkel och åskådlig bild över jordaxelns fasta riktning, under det jorden går sin årliga bana runt solen, samt över årstidernas växlingar. Härvid bör man naturligtvis se till, att »jordens» rotationsriktning och dess rörelseled runt »solen» äro de med verkligheten överensstämmande.

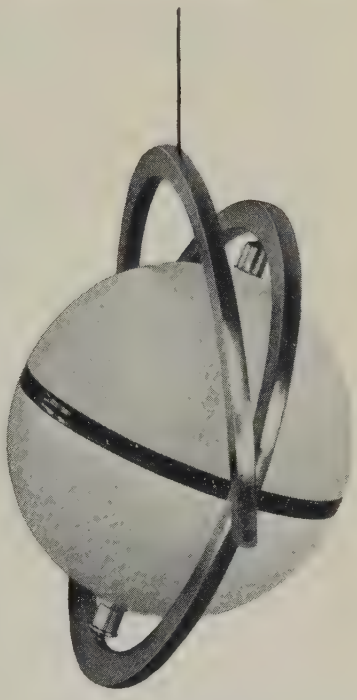


Fig. 1. Gyrotelluriet.

Har man tilläventyrs gott om tid och vill låta sina elever få en inblick i precessionsfenomenet, så låter detta sig göra på ett mycket enkelt sätt. Vid mässingsringen i »jordaxelns» förlängning skruvar man fast en liten vikt, så att klotets jämvikt ej längre blir indifferent, och sätter apparaten i rörelse liksom förut. Sedan »jorden» rört sig ett par varv runt »solen», märker man nu, att axeln visserligen har samma lutning mot »ekliptikan» som förut, men att den vridit sig något från sin föregående riktning.

Gyrotelluriet är konstruerat av folkskollärare S. Dahl, Munkfors, och kan erhållas genom P. A. Norstedts skolutställning, Stockholm. Priset är 45 kr.

(Forts.)

## Lufts termiska tryckkoefficient.

Vid laborationsövningarna i realgymnasiet har förf. med gott resultat använt den i fig. 1 avbildade »lufttermometern» för bestämning av $c$ i formeln $p = p_0(1 + ct)$ d. v. s. den termiska tryckkoefficienten för luft. En glasbehållare A innehåller c:a 150 cm³ *torr* luft och står genom ett grovt kapillärrör i förbindelse med de något vidare (3 mm diam.) glasrören B och C.[1] I B är insmält en nedåtböjd mörkfärgad glasspets. En gummislang förbinder B med C och innehåller kvicksilver som spärrvätska.

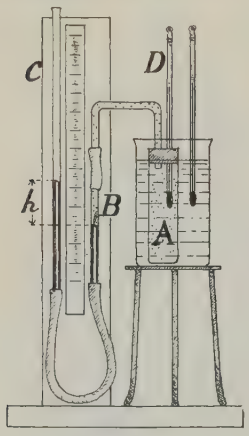


Fig. 1.

Vid försök med apparaten inställes först det i höjdled förskjutbara röret C, så att kvicksilvret i B når till glasspetsen. Därefter bestämmes den instängda luftens tryck ($p$) på vanligt sätt genom mätning av barometerstånd och tryckskillnad ($h$) mellan kvicksilverytorna i B och C; vidare avläses temp. ($t$) på termometern D. Sedermera nedföres hela behållaren A i en bägare med förut uppvärmt (c:a 75°) vatten. Efter några minuter visa termometrarna i A och i vattnet utanför ungefär samma temp. När detta inträffar, höjes röret C, så att kvicksilvret i B ånyo når glasspetsen, varefter luftens nya tryck ($p + \Delta p$) och temp. ($t + \Delta t$) bestämmas. Avläsningar och bestämningar av tryck och temperatur göras sedermera, då luften svalnat till c:a 60°, 50° och 40°.[2]

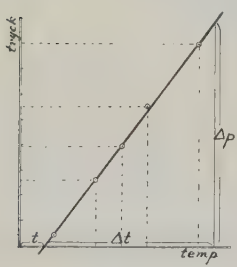


Fig. 2.

De erhållna resultaten (tryck och temp.) införas i ett koordinatsystem (fig. 2). Det visar sig då — om försöket är väl gjort — att »$p, t$»-punkterna ligga på en rät linje (åtminstone i det närmaste) i enlighet med gaslagen för tryckändring vid konstant volym.[3]

Linjens skärningspunkt med $t$-axeln avläses, likaså tryckökningen ($\Delta p$) för en god-

[1] För att torka luften i A ihållas några droppar konc. svavelsyra.

[2] Vid avsvalningen ligger luftens temp. c:a 2° över det omgivande vattnets. Genom påfyllning av lämplig mängd varmt vatten bringas de båda temp. att överensstämma.

[3] Temp. avsättes på abskissaxeln (1 cm = 10°) och tryck på ordinataxeln (1 cm = 10 mm Hg).

tyckligt vald högre temp. ($t + \Delta t$). Av gaslagen vid konstant volym erhålles

$$\frac{p}{1+ct} = \frac{p+\Delta p}{1+c(t+\Delta t)}, \quad \text{varav} \quad c = \frac{1}{p \cdot \frac{\Delta t}{\Delta p} - t}.$$

En undersökning av det i nämnaren på grund av sannolika avläsningfel uppkommande felet visar, att detta uppgår till 2 à 3 %. Korrektion för glasbehållarens utvidgning ökar enligt beräkning värdet på $c$ med c:a 1 %.[1]

Följande resultat äro hämtade ur en laborationsredogörelse:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp. ($t°$) | 70°,0 | 62°,5 | 49°,0 | 44°,0 | 40°,0 | 34°,0 | 20°,0 |
| Tryck ($p$ mm) | 912 | 885 | 850 | 838 | 828 | 814 | 778. |

Efter uppritning av diagram bestämdes $p$ enl. ovanstående beskrivning till 780 mm, $\Delta t$ till 49 mm, $\Delta p$ till 128 mm och $t$ till 21°, varav

$$c = \frac{1}{780\frac{49}{129} - 21} = \frac{1}{296 - 21} = \frac{1}{275} = 0{,}00364,$$

vilket värde på $c$ bör ökas med c:a 1 %, om hänsyn tages till kärlets utvidgning.

Ovan beskrivna apparat tillverkas komplett med ekstativ av Rudolph Grave A/B, Stockholm, och kostar kr. 16: 50.

*Ivar J:son Malmborg.*

## Några försök med termoelement.

Med hänsyn till termoelementens stora betydelse bör man vid undervisningen göra eleverna förtrogna med deras användning så ofta så lämpligen kan ske. Förf. vill rikta uppmärksamheten på några försök angående omvandling av mekanisk energi i värme, vid vilka ett termoelement gör god tjänst.

Ett termoelement (t. ex. av konstantan och koppar eller järn) göres i det här fallet så, att trådarna snos ihop i ena ändan så att god kontakt erhålles. De fria ändarna kopplas till spegelgalvanometern. Slår man nu lätt med en hammare på kontaktstället, får man kraftiga utslag. Värmeutvecklingen, då en rullande kula hejdas, visas genom att kontaktstället placeras, där stöten träffar. Hamras detsamma in i en blyklump, och får denna falla en eller ett par meter, fås ett tydligt utslag.

[1] Denna korrektion blir onödig, om man väljer den ihällda svavelsyremängden så att den kompenserar glasets utvidgning.

Friktionsvärmet kan man visa genom att fila på, eller invid kontaktstället. För att demonstrera skillnaden mellan släp- och rullfriktion, föreslår förf. till användning följande apparat, som är synnerligen enkel att tillverka. En träskiva (några cm tjock, en halv dm bred och ett par dm lång) förses med en grund, längsgående ränna. Längs rännans båda sidor borras hål, mitt för varandra, så att sex à sju hålpar erhållas. Korta trådar av koppar (ena sidan om rännan) och konstantan (andra sidan) trädas genom hålen och snos i hop på framsidan och baksidan, bäst så att de på framsidan gå vinkelrätt mot rännans längdriktning med kontaktställena i dennas mitt och alltså på baksidan i sned riktning. Denna anordning är ju inte annat än en termostapel; dess känslighet kan man pröva genom att andas lätt på ena sidans kontaktställen, då en inkopplad spegelgalvanometer bör göra ett kraftigt utslag.

Apparaten lägges på klossar så, att de undre kontaktställena ej kunna skava mot något underlag. Låter man nu en tung kula ena gången rulla över rännans kontaktställen (som representera punkter med höga friktionsvärden) och andra gången glida fram med samma hastighet, fås i första fallet ett litet men fullt tydligt utslag på det inkopplade mätinstrumentet, under det att i andra fallet utslaget går över hela skalan.

*Gunnar Norling.*

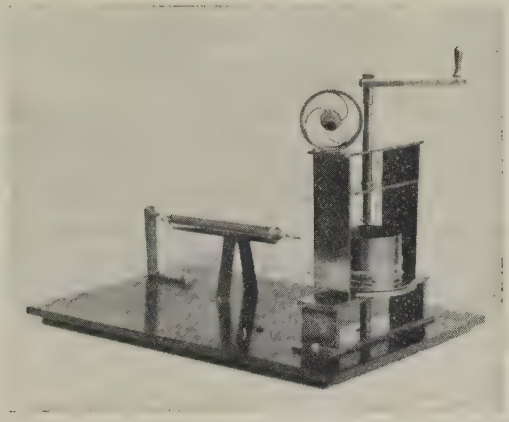
## Apparat för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten.

Här beskrivna apparat, som är avsedd för skolbruk, är helt utförd i mässing.

I den cylindriska kalorimetern, som ställes på tre värmeisolerande stöd på ett litet vridbart bord, inlägges en »friktionsring». Denna ring synes på figuren lagd på stativet. Mot ringens innersidor släpa tre fjädrar. Friktionsringen med fjädrarna kopplas på apparatens vridningsaxel. På friktionsringens yttersida finnes en stoppbom, som vid kringvridning av ringen stöter mot en annan stoppbom på kalorimeterns inre cylindriska yta. Friktionsringen kan således icke rotera i förhållande till kalorimetern. På kalorimeterns yttre cylindriska yta kan en tråd fästas, och trådens andra ände fästes i dynamometern. I kalorimetern hälles vatten.

Apparatens verkningssätt förklaras lätt på följande sätt: Veven kringvrides, så att tråden lindas några varv omkring kalorimetern,

och dynamometern anger då den kraft, som erfordras för kringvridningen av fjädrarna i friktionsringen. Om man nu tänker sig, att veven hålles stilla och kalorimetern kringvrides ett varv genom dragning i dynamometern, så är det utförda arbetet lika med produkten av kraften (avläst på dynamometern) och vägen (som är lika med kalorimeterns yttre omkrets). Men samma arbete utföres, om dynamometern hålles stilla, och veven kringvrides ett varv.



Ett försök ställer sig på följande sätt: Kalorimeterns vikt (med friktionsanordning) = 183 g; mässings sp. värme = 0,089; kalorimetervatten = 76 g; begynnelsetemp. = 16°,7 och sluttemp. = 17°,6; kalorimeterns diameter = 6 cm; antal varv = 300. Kraften (i gramkraft) bestämdes genom 16 avläsningar: 620 (7 st.), 630 (7 st.), 640 (2 st.); medeltal 627 gf.

Utfört arbete = $0{,}627 \cdot 0{,}188 \cdot 300 = 34{,}56$ kgm. Erhållen värmemängd = $0{,}089 \cdot 0{,}183 \cdot 0{,}9 + 0{,}076 \cdot 0{,}9 = 0{,}0831$ kgkal, varav den mekaniska värmeekvivalenten = $34{,}56 : 0{,}0831 = 416$.

Resultatet beror naturligtvis i hög grad på den noggrannhet, med vilken temperaturen avläses. På grund av den ringa temperaturhöjningen inverkar värmeutbytet med omgivningen knappast på resultatet, men man bör iaktaga, att såväl apparaten som kalorimetervattnet vid försökets början ha rummets temperatur. Försöksfelet kan då hållas under 10 %.

*Erik Nilsson.*

## En approximativ konstruktion av regelbundna månghörningar.

Med anledning av de approximativa $\pi$-värden, som angivits i de senaste numren av denna tidskrift, vill jag här fästa uppmärksamheten på en enkel approximativ konstruktion av regelbundna $n$-hörningar, vilken tycks vara mindre bekant än den förtjänar. Den har angivits av prins Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar-Eisenach,[1] och torde vara den elegantaste av dylika approximativa konstruktioner. Den är användbar för $n \geqq 6$ och ger mycket god approximation (för $n = 6$ är den f. ö. exakt).

Diametern $AB$ i en cirkel delas i $n$ lika stora delar. På förlängningen av de båda mot varandra vinkelräta radierna $OA$ och $OC$ avsättas $AD = CE = \frac{1}{n}$ av diametern. $P$ är den av linjen $DE$:s skärningspunkter med cirkeln, som ligger närmast $D$. Den sammanbindes med diameterns tredje delningspunkt $Q$ från $A$ räknat. Sträckan $PQ$ är då approximativt den i cirkeln inskrivna regelbundna $n$-hörningens sida. Om $PQ = x$ och radien $= r$, härledes utan svårighet:

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{1}{n^2}\left[n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}\right],$$

varav för de ifrågavarande $n$-värdena ($n \geqq 6$):

$$\frac{x^2}{r^2} = \frac{40}{n^2} - \frac{16}{n^3} - \frac{24}{n^4} - \frac{64}{n^5} - \frac{192}{n^6} - \frac{640}{n^7} - \cdots$$

$$\therefore \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{40}}{n}\left[1 - \frac{0{,}2}{n} - \frac{0{,}32}{n^2} - \frac{0{,}864}{n^3} - \frac{2{,}624}{n^4} - \frac{8{,}8}{n^5} - \cdots\right].$$

Det exakta värdet på $n$-hörningens sida, $y$, erhålles ur

$$\frac{y}{r} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}\left[1 - \frac{\pi^2}{6n^2} + \frac{\pi^4}{120n^4} - \cdots\right].$$

Det relativa felet blir då

$$z = \frac{x-y}{y} = 0{,}0066 - \frac{0{,}2013}{n} + \frac{1{,}334}{n^2} - \frac{1{,}20}{n^3} - \frac{1{,}264}{n^4} - \frac{10{,}67}{n^5} - \cdots$$

En närmare undersökning av det relativa felet ger vid handen, att $z < 0$ för $n <$ omkr. 20, och $z > 0$ för $n >$ omkr. 20. Absoluta

[1] Se Encykl. d. math. Wiss., Bd III, Teil I, Abt. II, s. 1116.

beloppet av $z$ (givetvis för heltalsvärden på $n$) har ett maximum ($< 0{,}002$) för $n =$ omkr. 10 och ett minumum ($< 0{,}0005$) för $n =$ omkr. 20 samt växer mot 0,0066 för oändligt växande $n$.

Det relativa felet är alltså alltid $< 0{,}0066$ eller $^2/_3$ %, men är ännu mindre för lägre $n$-värden; för $n <$ omkr. 40 är det $< 0{,}2$ % och i omgivningen av $n = 20$ rent av $< 0{,}05$ %.

Vid konstruktion på ritbräde uppnås därför praktiskt taget full exakthet.

*C. E. Sjöstedt.*

## En enkel experimentell belysning av Avogadros lag.

I denna tidskrift, årg. 1931 sid. 225, har lektor Bror Gustaver beskrivit »ett experiment till belysning av Avogadros lag». Han låter reaktionen mellan kolmonoxid och syre ($2\,CO + O_2 = 2\,CO_2$) försiggå i ett eudiometerrör. Jag har också använt denna reaktion i eudiometerrör, men då det av mig utförda experimentet rätt väsentligt avviker från lektor Gustavers samt synes mig mindre tidsödande och enklare att utföra, men icke desto mindre ger omedelbart påtagliga resultat, har jag ansett tillräckliga skäl föreligga att publicera en redogörelse över experimentets utförande och resultat.

Jag har framställt kolmonoxid genom reaktion mellan konc. svavelsyra och natriumformiat enligt reaktionsekvationerna $2\,HCOONa + H_2SO_4 = Na_2SO_4 + 2\,HCOOH$ och $HCOOH + (H_2SO_4) = = CO + H_2O + (H_2SO_4)$. Denna reaktion för framställning av kolmonoxid synes mig bättre än reaktionen mellan svavelsyra och oxalsyra, som ger en blandning av kolmonoxid och koldioxid, särskilt då det visat sig besvärligt att fullständigt befria kolmonoxiden från koldioxiden. Syret framställde jag ur kaliumklorat. Såväl syret som kolmonoxiden uppsamlade jag i gasometrar.

Som eudiometerrör har jag för några år sedan använt ett vanligt glasrör, 50 cm långt och med 12 mm diameter. Ena öppningen tillslöts med en gummipropp, genom vilken koppartrådar borrats och böjts till ett gnistgap om 0,5 mm. De försök, från vilka resultaten här angivas, har jag nyligen utfört med ett vanligt eudiometerrör, 50 cm långt och med 9 mm inre diameter samt med gradering i längdmått (mm). Jag har icke använt kvicksilver som spärrvätska utan oljeblandat vatten eller enbart olja. Genom att använda denna specifikt lätta vätska har jag kunnat underlåta att göra korrektioner för gasvolymernas beroende av tryckändringarna i eudiometerröret. Volymfelet uppgår till endast någon procent.

Jag placerade eudiometerröret, fyllt med vätskan, lodrätt i ett stativ med eudiometerrörets mynning minst 6 cm under vätskeytan i ett vanligt dricksglas, införde en godtycklig mängd kolmonoxid, markerade kolmonoxidens volym genom att på röret klistra en pappersremsa mitt för vätskeytan i eudiometerröret, införde sedan noggrant — genom att åstadkomma små gasbubblor — hälften så stor volym syre och markerade även syrets volym med en fastklistrad pappersremsa. Ett särskilt försök för att bedöma volymen av en gasbubbla gav 66 bubblor på 1 cm rörlängd. Oljan bildar ett några cm högt lager på vattnet, hindrar lösning i vattnet av den vid reaktionen bildade koldioxiden och bidrar genom sin färg att göra menisken synlig för auditoriet. Gnistan från induktoriet åstadkom ögonblicklig explosion, och några minuter därefter — sedan eventuella bubblor gått sönder och olja fått rinna ner från eudiometerrörets innerväggar — gjordes avläsning av den bildade koldioxidens volym. Oljemenisken skulle då stå mitt för den övre pappersremsan. Försöken ge vid handen, att koldioxiden först efter någon dag delvis lösts i oljan.

Resultaten av de av mig utförda försöken framgå av nedanstående tabell. Likhet skall råda mellan CO- och $CO_2$-volymerna.

| N:r | CO mm | $O_2$ mm | $CO+O_2$ mm | $CO_2$ mm | Vätska |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 45 | 22,5 | 67,5 | 44 | vatten + 4 cm paraffinolja |
| 2 | 50 | 25 | 75 | 49 | |
| 3 | 56 | 28 | 84 | 56 | |
| 4 | 64 | 32 | 96 | 62 | vatten + 5 cm matolja |
| 5 | 60 | 30 | 90 | 57 | |
| 6 | 62 | 31 | 93 | 63 | |
| 7 | 50 | 25 | 75 | 48 | vatten + 6 cm stearinolja |
| 8 | 56 | 28 | 84 | 56 | |
| 9 | 30 | 15 | 45 | 31 | |
| 10 | 85 | 42,5 | 127,5 | 85 | |
| 11 | 52 | 26 | 78 | 52 | paraffinolja |
| 12 | 65 | 32,5 | 97,5 | 63 | |
| 13 | 60 | 30 | 90 | 60 | |

Överensstämmelsen är god. Felet överstiger endast i några fall de 2 à 3 % man har att räkna med, i flera fall är felet mindre.

*Bertil Sandström.*

# Bokanmälningar.

H. Rheinboldt, *Chemische Unterrichtsversuche.* Th. Steinkopff, Dresden 1934. 326 sid., bd. RM 10:—.

Författaren är ledare för utbildningen i kemi av lärarekandidater vid universitetet i Bonn, och arbetet är en handledning för den experimentella, kemiska synteskurs, som där avlöst den äldre, till övermått analytiskt betonade kursen. Arbetet upptager 259 demonstrationsförsök, som alla fordra uppbyggandet av en apparatur av större eller mindre omfång, därjämte 311 smärre försök i anslutning till huvudförsöken.

Redogörelsen för försöken är gjord med en alldeles utomordentlig omsorg, in i minsta detalj fullständig, därjämte åtföljd av historiska notiser av stort intresse och av litteraturhänvisningar. Ett hundratal goda bilder underlätta läsarens arbete. Inledningskapitlet upptager bl. a. några allmänna anvisningar rörande utförandet av demonstrationsförsök, som äro så riktiga och så väl formulerade, att de förtjäna att här in extenso anföras; de borde — bildligt talat — vara i oförgänglig skrift inristade över ingången till varje kemisk läroanstalt.

»1. Varje försök måste verka övertygande och vara åskådligt. Man skall alltid försätta sig i åskådarens ställning; det kommer icke an på att man själv mer eller mindre tydligt iakttar det avsedda fenomenet; om försöket ej har avsedd inverkan på varje deltagare, har det intet värde för undervisningen. Detta gäller även för de enklaste försök; inför en större krets skall man ej experimentera i provrör, utan i cylindrar eller bägare; en upphettning kan här många gånger ersättas av att man tillsätter kokande vatten (tidsbesparing!).

Undervisningsförsök äro inga trolleriuppvisningar. Om man också bör sträva efter att visa förloppen på ett sätt, som gör ett starkt intryck, så får man likväl icke hemfalla till effektsökeri. Hos dem, som iakttaga experimentet, får ej råda någon oklarhet; apparaterna måste vara byggda så, att de kunna i alla delar överblickas. Apparatur och vidtagna åtgärder skola noga förklaras. Detaljer kunna till yttermera visso skisseras på tavlan.

2. Varje försök måste lyckas, i den meningen, att det förlöper på önskat sätt och ger den avsedda effekten, ej en oväntad sådan. En erfaren experimentator bör veta, hur han skall återföra ett försök, som hotar att spåra ur, i de riktiga gängorna, utan att

åskådarna märka något. Varje försök måste därför utprövas, tills man behärskar det fullständigt, och vidare sorgfälligt förberedas. Även vid skenbart mycket enkla försök får man ej lita på en självklar framgång. I varje försök skall man pröva apparatur, reagens och reaktionsförlopp och utföra huvudförsöket med samma förut prövade reagens och apparatur. Vid förförsöket förvissar man sig om den erforderliga försökstiden, så att man ej kommer i den situationen, att ett försök ej är avslutat vid timmens slut. Att rätt indela undervisningstiden är en svår sak, och ingen tid får förspillas genom en famlande extemporering. Många försök måste sättas i gång före lektionen, för att det åsyftade fenomenet skall snabbt kunna visas i det rätta ögonblicket; detta är föreläsningsassistentens(!) svåraste uppgift, som fordrar intuition och skicklighet.

3. Försiktighet och omtanke höra till varje försök; även det oskyldigaste försök kan bli farligt, om det utföres på ett tanklöst sätt. Inför lärjungar få oprövade försök ej utföras. Ett obekant försök, för vilket noggrann arbetsföreskrift saknas, skall man först utföra med små mängder. Att sorglöst utföra försök, kända för farlighet, är intet tecken på mod, utan på lättsinne och bristande ansvarskänsla.»

Låt vara, att dessa ord närmast gälla en undervisningsform (föreläsningens), som ej är vår skolas; de ha dock sin tillämpning även på den blandade lektions- och laborationsundervisning, som nu blivit införd. Det kan ju också sägas, att våra kemilärare ej ha någon större direkt användning för Rheinboldts arbete; många av hans försök utföra vi dock och komma även i framtiden att utföra inför klassen. Duktiga elever kunna där finna utmärkta uppgifter för enskilt arbete. Genom sitt gedigna, väl avvägda innehåll och sin mönstergilla avfattning är boken värd de högsta lovord.

*G. Starck.*

Gösta Angel, *Die Alkalichloridelektrolyse in Diaphragmazellen.* I. Teil. K. L. Beckmans boktryckeri (i distribution), Stockholm 1933, 126 sid., kr. 15:—.

Ovanstående arbete framträder som avhandling för vinnande av teknisk doktorsgrad och har till författare ing. G. Angel, känd för de bestående förtjänster, han inlagt särskilt om den elektrolytiska kloratframställningens praktiska utformning och om Nelsoncellernas (m. fl. enklare diafragmacellers) ekonomi, genom det

av honom införda greppet att tillvarataga slutlutens kloridhalt i form av högrent preparat.

Vid klor-alkali-elektrolys med strömmande elektrolyt måste tydligen, i motsats mot vad fallet är vid elektrolys med stillastående lösningar, efter en tids drift konstanta förhållanden utbildas. Det är dessa, som äro föremål för närmare undersökning i Angels dissertation. Undersökningen har icke givit anledning till några nya åskådningar rörande klor-alkali-elektrolysens förlopp; hydroxid- och klorid-koncentrationernas beroende av strömtäthet, genomrinningshastighet och spislösningens koncentration etc. visar sig stämma med de teoretiska värdena. Det bekräftas även, vad förut förmodats, att elektrolytens ökning i totalkoncentration vid genomrinningen genom cellen dels beror på vattensönderdelningen, dels på volymkontraktionen när kloridjoner ersättas av hydroxidjoner, medan avdunstningen under normala förhållanden spelar obetydlig roll. Vad strömtätheten beträffar, finner Angel för en horisontaldiafragmacell praktiskt taget konstanta värden (98% för NaOH, 95% för KOH), för så vitt katolytens alkalikoncentration (vilken ju är en funktion av genomrinningshastighet och strömtäthet) håller sig under ett visst bestämt värde, som enbart beror på genomrinningshastigheten. Överskrides denna punkt, sjunker utbytet lineärt. Den kritiska punkten, som för NaOH under praktikens förhållanden ligger vid omkring 3,8-normal, för KOH vid omkring 3,2-normal, är uppenbarligen den punkt, då hydroxidskiktets framträngande mot anoden (främst på grund av OH-jonernas vandringshastighet, i mindre mån på grund av vanlig diffusion) nätt och jämnt balanseras av genomrinningen. Det praktiska påvisandet av detta teoretiskt förutsägbara förhållande får väl anses vara avhandlingens viktigaste resultat. Tidigare undersökningar ha ej visat detsamma så klart.

En andra del av verket ställes i utsikt inom kort. Den skall speciellt koncentrera sig kring strömutbytets kvantitativa förutberäkning och emotses med intresse. *E. Linde.*

Karl K. Darrow, *Elementare Einführung in die Quantenmechanik.* Aus dem Englischen übersetzt von Dr. E. Rabinowitsch. S. Hirzel, Leipzig 1933, 123 sid., RM 6:—.

Boken är avsedd för läsare, som utan att vara fackmän ha någon förtrogenhet med den klassiska fysiken och analytisk mekanik samt någon förmåga att matematiskt behandla spec. vågrörelse- och svängningsproblem. Ungefär halva boken är ägnad åt de Broglies och Schrödingers vågmekanik och återstoden åt Heisenberg-Born-Jordans matrixmekanik. Författaren koncentre-

rar sina bemödanden på att ställa grundtankarna i de nya teorierna i så klar belysning som möjligt. Några speciella beräkningar utför han egentligen endast för den harmoniska oscillatorn. Han går icke in på den nya kvantstatistiken eller på Diracs teori för den magnetiska elektronen och positronen eller på de många tillämpningarna i olika riktningar.

Boken fyller emellertid sin uppgift på ett förträffligt sätt. Särskilt lovord förtjänar författarens förmåga att från den klassiska ståndpunkten oförmärkt leda läsaren in i de nya tankebanorna.

*D. Enskog.*

Nyström-Olson, *Likformighetslära för gymnasiet.* P. A. Norstedt & Söners Förlag (Svenska Bokförlaget) 1933, 36 sid., 1 krona.

Författarnes strävan att i kortfattad form åstadkomma en geometrikurs med i det stora hela samma sakinnehåll som i förut använda läroböcker har enl. anmälarens åsikt krönts med stor framgång. Av det vanliga materialet är det egentligen endast fjärde likformighetsfallet och ptolemeiska satsen, som förbigåtts, och därmed torde ingen större skada vara skedd! Framställningen är klar och koncis; i detta sammanhang må framhållas författarnes förtjänstfulla sätt att behandla harmoniska cirkeln. Ibland blir dock framställningen väl knapphändig — se sats 1, där påståendet, att produkten $(a + p)(b + q)$ obegränsat närmar sig värdet $ab$, lämpligen hade kunnat förtydligas, exempelvis genom utförande av produkten.

För övrigt må endast anmärkas, att definitionen på omvänt proportionella storheter ej upptagits. Den förekommer visserligen i ex. 8, som dock genom en lapsus felformulerats.[1] Ett fel i facit (ex. 30) är också noterat.

En mindre men under nuvarande kursförhållanden fullt tillräcklig och dessutom synnerligen väl vald samling geometriska övningsexempel ingår i läroboken.

Arbetet må varmt rekommenderas! *Joh. P. Pettersson.*

Sture Nydell, *Elektroteknik för sjökaptensklasser jämte handledning i radiopejling m. m.* Sv. Bokförlaget, Stockholm 1933, 194 sid., kr. 10:50.

Med föreliggande arbete har författaren på ett synnerligen tillfredsställande sätt lyckats lösa den säkerligen svåra uppgiften att åstadkomma en lärobok i elektroteknik för sjökaptensklasserna vid Sveriges navigationsskolor.

[1] Enl. medd. från förlaget är rättelse nu införd i till bokhandeln utsända ex. (Red.)

På de första 75 sidorna behandlas magnetismen, elektricitetslära samt elektricitetens användningar. Den klara och rediga framställningen belyses av talrika utmärkta figurer samt innehåller värdefulla experimentella anvisningar.

I de följande kapitlen, omfattande c:a 115 sidor, behandlar förf. i lätt förståelig form den elektriska svängningskretsen, elektronrör och deras användning, radiopejling, ombordradiopejlapparater, handledning i radiopejling m. m.

Undertecknad, som använt läroboken vid undervisningen vid Härnösands navigationsskola, rekommenderar arbetet med nöje. En prisreglering nedåt skulle göra arbetet lättare åtkomligt för intresserade utanför navigationsskolorna. Boken är värd stor spridning.

*Clas Mäcs.*

Berg-Hagström, *Räknelära för allm. läroverk och flickskolor.* Nionde uppl. omarbetad av Elis Hjalmar. Första delen, för 5-åriga realskolan klasserna 1 och 2, 142 sid., kr. 2:—, facit 40 öre. Första delen, för 4-åriga realskolan, klass 1, 86 sid., kr. 1:40, facit 25 öre. Andra delen för 4- och 5-årig realskola, klasserna $3^5$—$5^5$, $2^4$—$4^4$, $LI^4$, 214 sid., kr. 2:30, facit 30 öre.

Berg-Hagströms gamla välkända räknelära har nu av lektor Hjalmar, som redigerat även föregående upplaga, omarbetats till överensstämmelse med de nya kursplanerna. Uppgiften är inte lätt, och det ligger i sakens natur, att endast framtiden kan avgöra, om utgivaren lyckats. För egen del känner jag föga saknad efter allt det, som utmönstrats ur boken, snarare en viss glädje över att så pass mycket fått stå kvar av det, som faktiskt ej tillhör den nu åtminstone i vissa stycken rätt så illa avvägda realskolekursen. Samtidigt måste jag dock bekänna min pessimistiska tro, att allt detta ej kan medhinnas, inte på långt när.

Som en nyhet kan framhållas, att en framställning av likformighetsläran inarbetats i boken, något som ju kan vara bra för de skolor, där detta kapitel ej ingår i den använda läroboken i geometri.

Sortförkortningarna ha moderniserats, skrivas nu utan punkt, gram förkortas till g.

Småsaker finnas givetvis alltjämt att anmärka på. Är det inte olämpligt, att i en bok, utan citationstecken, använda uttrycket: vänd upp och ned på divisorn? (Vad får man, om man *verkligen* vänder upp och ned på $\frac{6}{9}$?) Och är det inte bakvänt att först skriva $\frac{5}{6}$. 12 och sedan tala om, vad det betyder? Men sådant kan ju lätt rättas till av den på stadiet tränade läraren. Som helhet är boken bra.

*Bengt E. Nyström.*

## Gradualavhandlingar.[1]

Bengt Edlén, *Wellenlängen und Termsysteme zu den Atomspektren der Elemente Lithium, Beryllium, Bor, Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff.* Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. IV. Vol. 9. N:o 6 (153 sidor). Disp. i Uppsala 28 april 1934. Opponenter: docent Gunnar Kellström och fil. mag. Daniel Borg.

Arbetets experimentella del, utförd på Fysiska Institutionen i Uppsala 1929—32, består i en fotografering och våglängdsbestämning av de lätta elementens vakuumgnistspektra huvudsakligen i det extremt kortvågiga området. Avhandlingens större del (133 sidor) omfattar termanalysen av dessa spektra.

För fotograferingen av det extremt ultravioletta spektrum ha använts konkavgitter av glas eller spegelmetall, uppställda för strykande incidens, d. v. s. med infallsvinkeln nära 90°. Det har visat sig, att en sådan montering ökar den praktiska upplösningsförmågan och för övrigt är nödvändig för att överhuvud taget registrera våglängder kortare än 300 Å. Vid 85° infallsvinkel ha fotograferats spektra ned till 40 Å.

För att för området $\lambda < 500$ Å erhålla en tillförlitlig våglängdsskala, som förut saknades, fotograferades intensiva kortvågiga linjer i de gitterordningar, som falla i området 2300—4500 Å, och mättes där i förhållande till de noggrannt bestämda linjerna av järnets bågspektrum, vilket samtidigt fotograferades på plåten. Absoluta noggrannheten i det så erhållna normallinjesystemet kan uppskattas till 0,01 Å, medan den relativa noggrannheten inom ett litet område ($< 1$ Å) torde uppgå till 0,001 å 0,002 Å.

Det övervägande flertalet (c:a 1200) av de i extremt ultraviolett uppmätta linjerna tillhöra elementen kol, kväve och syre. Då de förekomma som en mer eller mindre stark inblandning i varje spektrogram i extremt ultraviolett, är en noggrann kännedom om dessa tre elements spektra av väsentlig betydelse för vakuumspektroskopien. För området $\lambda < 550$ Å ha spektrogrammen för kol, kväve och syre reproducerats i ljustryck i 8 ggr förstoring.

Praktiskt taget samtliga i extremt ultraviolett observerade linjer ha inordnats i termsystem, d. v. s. linjernas vågtal kunna anges som differenser mellan vissa för varje jon typiska tal, spektraltermer, och de funna termerna ha kunnat identifieras i

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

enlighet med HUNDS teori för atomspektra. Som vägledning vid analysen har framförallt utnyttjats den utpräglade analogien mellan spektra av joner med samma elektronantal, t. ex. Li I, Be II, B III, C IV, N V och O VI, vilka serier kunnat följas till höga jonisationsstadier. Härigenom har erhållits en säkrare utgångspunkt även för analysen av de lägre jonisationsstadier, som tidigare undersökts av andra forskare, varvid i flera fall, särskilt för de svåranalyserade singulettsystemen, en väsentlig revidering av den äldre uppfattningen visat sig nödvändig. De båda enklaste elektronsystemen, som bestå av en resp. två elektroner med spektra analoga med vätets resp. heliums bågspektra, äro de enda, vilkas termer man hittills kunnat på kvantmekanisk väg exakt beräkna. Inom de av mätfelen bestämda gränserna överensstämma mätningarna med de teoretiskt beräknade värdena för dessa spektra.

Genom den refererade avhandlingen kompletteras tidigare arbeten, så att en detaljerad kännedom om samtliga 36 spektra av de 8 första elementen i periodiska systemet numera föreligger.

JONAS SÖDERQVIST, *Vakuumfunkenspektren der Elemente Natrium, Magnesium, Aluminium und Silicium.* Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis Ser. IV, Vol. 9, N:o 7. Disp. i Uppsala den 18 maj 1934. Opponenter: docent BENGT EDLÉN och fil. mag. HUGO SANNER.

Om man genom någon yttre åverkan lyckas rubba en atoms elektronhölje ur sitt normala, stabila tillstånd, försöker detta att under utsändande av elektromagnetisk strålning återtaga sitt ursprungliga tillstånd. Den metod, som visat sig kunna åstadkomma den fullständigaste sönderspräng̈ningen av atomerna, är den elektriska gnistan i vakuum.

Den första delen av avhandlingen behandlar de experimentella anordningarna. Fotograferingen av gnistans spektrum sker med tillhjälp av ett konkavgitter, som är så uppställt, att det infallande strålknippet från gnistan bildar mycket liten vinkel med gitterytan. Det har nämligen visat sig, att man med denna gitteruppställning lyckas framtränga avsevärt längre ned i det extremt ultravioletta spektralområdet. Med lämpligt valt elektrodmaterial ha på detta sätt spektra av grundämnena natrium, magnesium, aluminium och kisel upptagits. Dessa spektralupptagningar sträcka sig från och med det med kvartsspektrograf upptagbara området ned till ung. 50 Ångströmenheter. Upptagningar ha gjorts med olika spektrografer, emedan dessa ha skilda områden inom vilka de äro särskilt lämpliga.

I denna del av avhandlingen förefinnas även fortlöpande våglängstabeller för de undersökta elementen, från kortast uppmätta våglängden upp till 1000 Å. Delar av de upptagna spektrogrammen finnas även återgivna i tio gångers förstoring.

I de spektralupptagningar, som erhållas med gnista, får man linjer från olika högt ioniserade spektra blandade om varandra. I den andra delen av avhandlingen redogöres för de olika typer av spektra, som erhållits, och här få praktiskt taget alla av de uppmätta linjerna sin förklaring.

Först redogöres för neonliknande spektra, d. v. s. de spektra, som uppkomma, då antalet elektroner omkring kärnan är detsamma som i den normala neonatomen. Från natriumatomen har alltså bortryckts en, från magnesiumatomen två, från aluminiumatomen tre samt från kiselatomen fyra elektroner, varvid de spektra, som betecknas med Na II, Mg III, Al IV samt Si V, erhållas. Neons bågspektrum har grundligt mätts och klassificerats av Paschen, men när de av honom använda termbeteckningarna skulle överföras till de nu brukliga, stötte man på stora svårigheter, emedan de vanliga kombinationsreglerna ej tycktes gälla. Därför framkommo också olika tydningar, men någon säkerhet i identifieringarna kunde ej erhållas. Detta gäller särskilt för de termer, där lyselektronen befinner sig på en trekvantig bana. Emedan dessa termer bestämts i här undersökta spektra, ha termbeteckningarna lättare och säkrare kunnat fastställas.

På samma sätt som för neonliknande spektra återfinnas sedan i tur och ordning våglängdstabeller med identifieringar samt termtabeller för fluor-, syre-, kväve-, kol-, bor- och berylliumliknande spektra av natrium, magnesium, aluminium samt för de tre första även av kisel. De identifierade linjerna tillhörande det berylliumliknande spektret av aluminium (Al X) torde för övrigt tillhöra det högst ioniserade spektrum, från vilket linjer överhuvud uppmätts och identifierats. Linjer tillhörande litiumliknande spektra ha endast kunnat uppmätas i natriumspektret (Na IX), emedan motsvarande linjer hos övriga spektra förskjutits för långt ned i det extremt ultravioletta spektralområdet. Detta är dock det enda fall, där man hittills erhållit linjer tillhörande två olika alkaliliknande spektra, i detta fall alltså natriums bågspektrum (Na I) samt natriums litiumliknande spektrum (Na IX).

Slutligen finnas även tabeller med absolutvärdena för grundtermerna samt jonisationspotentialerna.

---

## Föreläsningar för lärarekandidaterna vid provårsläroverken under läsåret 1933—34.[1]

*Lund:* f. d. lektor G. Forsström, Ett par metodiska frågor till den geometriska optiken; lektor O. D. Gertz, Kemiundervisningens metodik med särskild hänsyn till organiska kemien; Fysiologisk kemi; lektor B. Svensson, Geometriundervisningens metodik.

*Stockholm:* lektor C. Bergholm, Demonstration av Östermalms läroverks fysiska laboratorium; adjunkt O. Moberg, Om kartprojektion; lektor Eva Ramstedt, Om undervisning i atomfysik; lektor G. Starck, Avogadros sats; lektor A. Wahlgren, Matematisk behandling av växelströmsläran; adjunkt B. Wahlström, Experimentella anordningar för optiska försök.

*Uppsala:* lektor G. Bolinder, Översikt av matematikens ställning vid de svenska gymnasierna under olika tider; Matematikundervisningens allmänna metodik på gymnasiet; adjunkt K. Lenander, Geometriundervisningen i realskolan; lektor B. Eriksson, Lokalerna för undervisning i fysik (övningar); adjunkt P. Granath, De fysiska laborationerna i realskolan (övningar).

## Tidskrifter.

**Svensk kemisk tidskrift.** Utgiven av Svenska Kemistsamfundet. Årligen 12 häften.

Ur innehållet i årg. XLVI, 1934. N:r 2 (febr.): R. Nilsson, Über die Funktion der Phosphorsäure bei dem glykolytischen Kohlehydratabbau. — N:r 3 (mars): S. Hähnel och B. Holmberg, Om kolorimetrisk bestämning av aldehyd. — H. Willstaedt, Ein den β-Jonon-Kohlenstoffring enthaltendes Fulven. — A. Hedvall und E. Gustavson, Katalytische Aktivität und Ferromagnetismus. — N:r 4 (april): E. Larsson, Fördelningsmetodens användning för bestämning av molekylers aktivitetskoefficienter i saltlösningar. — E. Hägglund und O. Sundelin, Über den Azetyl- und Methoxylgehalt des Fichtenholzes. — N:r 5 (maj): A. Mellander, Einige Alkylsulfid- und Alkylsulfonkarbonsäuren. — P. Klason, Undersökningar rörande sambandet mellan växternas naturliga system och deras kemiska byggnad. — N:r 6 (juni): R. Junell, Reaktionskinetische Studien über die Umlagerung von aci-Form in nitro-Form bei Nitroäthan. — C. du Rietz, Über die Bedeutung der Ausführungsweise der KCl-Ableitung bei der pH-Bestimmung von Suspensionen. — N:r 7 (juli): R. Morral and A. Westgren, The Crystal Structure of $Tl_7Sb_2$. — Referat och översikter. Meddelanden från Sveriges Kemiska Industrikontor.

[1] Uppgifterna ha godhetsfullt lämnats av Skolöverstyrelsens statistiska avdelning. Inga uppsatser av matematiskt-naturvetenskapligt innehåll förekomma i läroverkens årsredogörelser 1933—34.

**Populär astronomisk tidskrift.** Årg. XV, dubbelh. 1—2.

Ur innehållet. N. V. E. Nordenmark, Pehr Wilhelm Wargentin, ett 150-årsminne. — B. Lindblad, Jupitermånarne och modern teori. — K. G. Malmquist, De statistiska undersökningarna rörande stjärnsystemets byggnad. — N. Ambolt, Astronomiskt geodetiska arbeten i Sven Hedins exp. till Ost-Turkestan. — K. Bohlin, Till frågan om Sirius färg i äldre tider. — K. Lundmark, Några resultat av de senaste årens marsforskning. — K. Lundmark, Aristoteles som praktisk astronom. — Notiser.

**Industritidningen Norden.** Årg. 1934, h. 10—34.

Ur innehållet. Om lödning, lod, lödmedel och lödverktyg. — De tekniska framstegen i det historiska sammanhanget. — Sjöfartsmuseet i Göteborg. — Kolhydreringens utveckling. — Om propellrars mekaniskt-fysikaliska arbetssätt. — Vattentätning av textilier. — Strömlinjebilen. — Nyheter på Svenska mässan 1934. — Ljudfilm som översätter. — Positiva färgbilder. — Med varje nummer följer Svensk tidskrift för industriellt rättsskydd innehållande illustrerade patentbeskrivningar.

**Era.** Elektricitetens rationella användning. Årg. 1934, h. 3.

Hur en armatur provas. — Elektrovärmeinstitutet 1923—1933. — Gallerstyrda likriktare. — Om tillverkning av elektrovärmeapparater. — Moderna svetsmaskiner. — Elektrisk kylning. — Aseas högspänningslaboratorium i Ludvika. — Ett stort antal notiser om elektriska nyheter.

**Matematisk Tidsskrift.** København 1934, h. 1—3.

Ur innehållet i avd. **A.** H. Jensen, Den regulære Femkant. — E. Juel, Merkators Projektion. — A. Nygaard, Lemniscater. — H. Tvermoes, Permutationsopgave. — J. Mollerup, Blandt Bogstaver og Tegn. — A. F. Andersen, Eksponential- og Logaritmfunktioner. — J. Hjelmslev, Den pythagoreiske Læresætning. — A. S. Bang, Tals Opløsning i Primfaktorer. Avd. **B.** J. Hjelmslev, Studier over Produktforhold. — M. Riez, Eine Bemerkung über den Eindeutigkeitssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen. — F. Carlson, Eine Minimum-Aufgabe bei Polynomen. — J. Hjelmslev, Exhaustionsbeviset hos Euklides. — J. Hjelmslev, Ickeeuklideisk Geometri og Projektivgeometri.

**Fysisk Tidsskrift.** København 1934, h. 1—3.

Ur innehållet. F. Kalckar, Aarets Nobelpristagare. — J. C. Jacobsen, Om Opdagelsen af de positive Elektroner. — R. W. Asmussen, Om Brintisotoper og det tunge Vand. — E. Krüger, Molekylspektre og Kvanteteori. — P. Hein, Principet for Ra-lampens skærme. — E. W. Jensen, Demonstration af Lydens Hastighed i Luftarter. — Boganmeldelser.

# Problemavdelning.[1]

## Matematiska uppgifter.

687) *För vilka värden på a har ekvationen*

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{a}{(a+1)^2}=\frac{a}{x+a^2}$$

1:o *en rot* $= a$; 2:o *två rötter* $= a$; 3:o *en dubbelrot* $\neq a$? *X.*

688) *En rät linje med en punkt A, en punkt B utanför densamma och en determinerad linje a äro givna. Bestäm på den givna linjen en punkt X så, att* $\overline{BX}^2 = a \,.\, AX$. *X.*

689) *Sök orten för en punkt, som rör sig så, att om normaler fällas mot benen i en likbent triangel, fotpunkterna och basens mittpunkt ligga i rät linje.* *S. B.*

## Enklare matematiska uppgifter.[2]

690) Visa, att summan av rötternas kvadrater är densamma i ekvationerna $x^2+(a+2)x+a=0$ och $x^2+ax-(a+2)=0$.

691) Hur många gånger är den $(3n-1)$:sta digniteten av $81^3$ större än den $(2n-1)$:sta digniteten av $9^9$?

Svar: 729.

692) I en aritmetisk serie är summan av de $n$ första termerna $n^2$. Visa, att summan av de $n$ följande är $3n^2$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. nr. 690—695, 703 äro insända av *C. H.*, uppg. nr. 696—700, 704, 706 av *X.*, uppg. nr. 701—702; 705 av *S. B.*

693) Finnes någon rätvinklig triangel så beskaffad, att man från den räta vinkelns spets till hypotenusan kan draga en rät linje, som delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi?

Svar: Sidornas förhållande är $1 : \sqrt{63} : 8$.

694) En sida i en rektangel delas i tre lika delar, och delningspunkterna förenas med var sin av motstående sidas ändpunkter. Om föreningslinjerna därvid bilda rät vinkel, hur stort är förhållandet mellan rektangelns sidor?

Svar: 2 : 3 eller 1 : 3.

695) I en triangel är en sida $3+\sqrt{5}$, bissektrisen mot denna sida är $3+\sqrt{5}$ och delar densamma enligt gyllene snittet. Beräkna de övriga sidorna.

Svar: $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$ och $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

696) Toppen i en likbent triangel ligger mitt emellan höjdernas skärningspunkt och basen. Beräkna vinklarna.

Svar: Toppvinkeln = 109°,46.

697) Beräkna vinklarna i en likbent triangel, om höjdernas skärningspunkt ligger på den inskrivna cirkeln.

Svar: Toppvinkeln 83°,64.

698) Visa, att $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

699) Man har $(1-\sin\alpha)=p\cos\alpha$. Beräkna $(1-\cos\alpha):\sin\alpha$ som funktion av $p$.

Svar: $\frac{1-p}{1+p}$.

700) I triangeln $ABC$ är vinkeln $C=90°$. Visa, att $a+c=b\,tg\left(45°+\frac{A}{2}\right)$.

701) På ett bord ligga två kongruenta, liksidiga koner på mantelytorna med en generatris gemensam. Hur högt över planet ligger basytornas beröringspunkt.

Svar: $\frac{2h}{3}$, där $h$ är konernas höjd.

702) En cirkelsektor med centrivinkeln $2\alpha\ (< 180°)$ roterar kring en diameter, som ej råkar sektorbågen. Den härvid alstrade sfäriska ytan är $S$ och de övriga ytornas summa $M$. Visa, att $S = 2M\ tg\ \alpha$.

703) I triangeln $ABC$, där vinkeln $C = 90°$ och hypotenusan konstant, dragas bissektriserna $BD$ och $AE$. När blir a) $CE \cdot CD$ b) $CE \cdot EB$ ett maximum?

Svar: a) om $B = 45°$ b) om $B = 24°{,}47$.

704) Det finnes tre punkter på kurvan $y(x^2 + 1) = x + a$, i vilka $y'' = 0$. Dessa punkter ligga i rät linje. Sök ekvationen för denna linje.

Svar: $4y = x + 3a$.

705) En kvadrat $ABCD$ har hörnet $A$ fast i punkten (0; 0); $B$ glider utefter linjen $y = kx + l$. Sök orten för $C$.

Svar: Räta linjerna $(k - 1)x - (k + 1)y + 2l = 0$; $(k + 1)x + (k - 1)y + 2l = 0$.

706) Punkterna $A$, $B$ och $C$ ligga i ordning i rät linje. Att på normalen i $C$ bestämma punkten $P$ så, att $\angle PBC = 3 \cdot \angle PAC$. Möjlighetsvillkor?

## Lösningar till uppg. 654—656.

654) *Lös ekvationen*

$$\sin x + \cos x + tg\,x + cot\,x = -2.$$

Kända formler ge efter vartannat

$$\sin x + \cos x + \frac{2}{\sin 2x} + 2 = 0,$$

$$\sin x + \sin(90° - x) + \frac{2(\sin 90° + \sin 2x)}{\sin 2x} = 0,$$

$$\sin 45° \cos(45° - x) \sin 2x + 2 \sin(45° + x) \cos(45° - x) = 0,$$

varav $\cos(45° - x) = 0$ och $\cos(90° + 2x) - 2\sqrt{2} \sin(45° + x) = 0$. Den första ekvationen ger $x_1 = 135° + n \cdot 180°$. Av den senare fås $1 - 2\sin^2(45° + x) - 2\sqrt{2} \sin(45° + x) = 0$ och $\sin(45° + x) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ samt $x_2 = -27°{,}97 + n \cdot 360°$; $x_3 = 117°{,}97 + n \cdot 360°$.

*S. B.* Även löst av *B—r*.

655) *Tre av rötterna till ekvationen*

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

*äro* $x_1$, $x_2$ *och* $x_3$. *Beräkna* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
*X.*

Enär $x^3$-term saknas, är fjärde roten $= -(x_1 + x_2 + x_3)$. Man får då ur $x^3$-termen, att $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4(x_1 + x_2 + x_3) = a$ eller $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = a$. Det sökta uttryckets värde blir alltså $= -a$. *B—r.*

656) *Ett kärl med given inre volym skall ha samma konstruktion som en tändsticksask. Alla väggar skola ha samma givna tjocklek. Hur bör kärlet dimensioneras för att väggarnas sammanlagda volym må bli den minsta möjliga?* *X.*

*Hjälpsats: Om a, b och c äro givna positiva tal och de pos. talen x, y och z ha given produkt, så är* $(x + a)(y + b)(z + c)$ *minimum, då* $x : a = y : b = z : c$.

Enligt teorien för isoperimetriska produkter (denna tidskrifts årg. *10* sid. 1) är $x + y + z$ för givet $xyz$ minst, då $x = y = z$. Därav följer, att $xy + xz + yz$ under samma förutsättning är minst, då $x = y = z$ $\left(\frac{1}{xyz}\right.$ är givet och $xy + xz + yz$ är minst på samma gång som $\left.\frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. Om man nu i produkten $(x + a)(y + b)(z + c)$ sätter $x = ax_1$, $y = by_1$ och $z = cy_1$, gäller det att söka minimum för $(x_1 + 1)(y_1 + 1)(z_1 + 1)$, då $x_1y_1z_1$ är givet. Uträknas produkten, finner man, att min. inträffar för $x_1 = y_1 = z_1$, d. v. s. $x : a = y : b = z : c$.

Är nu askens inre längd i utdragsriktningen $x$, inre bredd $y$ och inre höjd $z$ samt väggtjockleken $d$, så är den yttre volymen $(x + 2d)(y + 4d)(z + 3d)$ och $xyz$ givet. Yttre volymen och därmed väggarnas sammanlagda volym är enligt hjälpsatsen minst då $x : 2 = y : 4 = z : 3$. *X.* Även löst av *B—r.*

---

Harold C. Urey

## Nobelpriset i kemi.

Genom Vetenskapsakademiens beslut den 15 november 1934 att tilldela professorn vid Columbia University i New York, Harold C. Urey, 1934 års nobelpris i kemi för upptäckten av det tunga vätet lämnades ett välförtjänt erkännande för en av de mest epokgörande upptäckter, som under de senaste åren gjorts på atomforskningens område.

Harold Clayton Urey är född den 29 april 1893 i Walkerton i Indiana, U. S. A. Efter avslutad skolgång studerade

han till en början zoologi vid Montana University i Missoula, där han 1917 blev Bachelor of Science i detta ämne. Hans intresse för kemi vaknade dock snart, och år 1923 promoverades han som elev till professor G. N. Lewis vid University of California i Berkeley. Som American-Scandinavian-Foundation-stipendiat studerade han år 1923—1924 hos Niels Bohr i Köpenhamn. Efter hemkomsten utnämndes han till Associate Professor vid John Hopkin's University i Baltimore, vilken befattning han innehade till 1929, då han erhöll en liknande anställning vid Columbia University i New York. I maj innevarande år utnämndes han till professor i kemi vid detta universitet.

Urey är en mycket produktiv författare och är huvudredaktör för den sedan några år tillbaka på hans initiativ utgivna tidsskriften »The Journal of chemical Physics». Trots stora vetenskapliga förtjänster var Urey dock relativt okänd ända tills för två år sedan, då han genom framläggande av bevis för existensen av en väteisotop med atomvikten 2 blev allmänt bekant inom den vetenskapliga världen.

Upptäckten av det tunga vätet är ett nytt exempel på hur trevande det naturvetenskapliga forskningsarbetet ofta fortskrider, tills slutligen lösningen av ett visst problem är omedelbart förestående och den som är redo därtill får förmånen att giva den.

Alltsedan Prout för över hundra år sedan framkastade den fascinerande tanken, att all materia skulle vara uppbyggd av en ursubstans, som han ansåg utgöras av väte, har frågan om grundämnenas atomvikter tilldragit sig stort intresse. Det är också i första hand tack vare den utomordentliga precision, varmed numera atomviktsbestämningar kunna utföras, som många av de nu kända grundämnena kunnat upptäckas. Basen i den internationella kemiska atomviktsskalan utgöres som bekant av vanligt kemiskt rent syre, vars atomvikt fastställts till 16. Det bästa på kemisk väg erhållna värdet på vätets atomvikt utgör 1,00777. I utomordentlig överensstämmelse härmed erhöll F. W. Aston 1927 genom mass-

spektrografiska precisionsmätningar värdet $1{,}00778$. Därmed ansågs vätets atomvikt definitivt fastställd.

W. F. Giauque och H. L. Johnston upptäckte emellertid år 1929 på spektroskopisk väg, att syre, som tidigare ansetts vara enhetligt, hade en isotop med atomvikten 18, vilken emellertid förekom i så ringa mängd i vanligt syre, att den icke kunde upptäckas med Astons metod.

R. T. Birge och D. H. Menzel, vilka ingående studerat hithörande problem, riktade 1931 uppmärksamheten på att basen sålunda icke var densamma i den astonska och den kemiska atomviktsskalan. Aston hade nämligen under antagande av att syret var enhetligt valt syreisotopen med atomvikten 16 ($O^{16}$) till bas, under det att vid de vanliga kemiska atomviktsbestämningarna basen utgöres av vanligt syre, som är en blandning av $O^{16}$ och $O^{18}$ i proportionen 630 : 1. Det var alltså endast en egendomlig tillfällighet, att de bägge atomvikterna för väte visade sig vara så lika. Efter reduktion av Astons atomvikt till den kemiska atomviktsskalan erhölls värdet $1{,}00756$. Avvikelsen mellan $1{,}00756$ och $1{,}00777$ ansågo Birge och Menzel enklast kunna förklaras genom antagandet, att det existerade en väteisotop med ungefär dubbelt så stor atomvikt som det vanliga vätet, och de beräknade koncentrationen av den tunga väteisotopen i vanligt väte vara 1 : 4 500. Det var alltså inte att vänta, att den tunga väteisotopen skulle kunna upptäckas vid masspektrografiska undersökningar av vanligt väte. Något försök att genom anrikning av den förmodade isotopen experimentellt påvisa dess existens gjordes emellertid icke av dessa forskare.

Genom magneto-optiska undersökningar på väte hade samtidigt F. Allison erhållit resultat, som tydde på förekomsten av väteatomer med massorna 2 och 3. Urey, som redan tidigare funnit en enkel lagbundenhet i atomkärnornas byggnad, tydande på existensen av atomer med atomvikterna 2, 3, 5 o. s. v., erhöll genom ovannämnda undersökning impulsen till att på allvar taga itu med frågan om vätets isotoper.

Hur uppgiften praktiskt skull kunna lösas, fick Urey uppslaget till en dag i augusti 1931, då det plötsligt stod klart för honom, att man borde kunna utnyttja det välkända förhållandet, att vid fraktionerad destillation av en blandning av isotoper den tyngre anrikas i vätskan och att samma förhållande borde gälla vid förgasning av flytande väte. Som han saknade resurser att utföra detta experiment vid sitt institut, bad han F. G. Brickwedde vid Bureau af Standards i Washington att utföra densamma, och denne förgasade under största försiktighet 3 liter flytande väte vid en temperatur av 13°,95 K och några mm tryck. Under den långa väntan på det eftertraktade provet räknade Urey ut tillsammans med sin assistent G. M. Murphy, som invigts i planerna, att linjerna i det tunga vätets linjespektrum borde ligga något vid sidan av linjerna i Balmerserien. När de sedan äntligen erhöllo provet, voro de alldeles utom sig av nyfikenhet och arbetade dag och natt för att undanröja de svårigheter, som uppstodo vid de spektroskopiska upptagningarna. Slutligen lyckades de dock på nyåret 1932 erhålla så god upplösning av linjerna, att de otvetydigt kunde fastslå, att det fanns linjer på just de ställen, där de beräknat finna dem. Därmed var existensen av en väteisotop med atomvikten 2 ställd utom allt tvivel. Resultatet av undersökningarna framlades i januari 1932.

På förslag av upptäckarna kallas — i analogi med benämningen proton på det lätta vätets atomkärna — den tunga väteatomens kärna deuton och det tunga vätet deuterium, för vilket infördes det kemiska tecknet D, under det att det lätta vätet kallas proterium och behåller beteckningen H. Urey beräknade deuteriumkoncentrationen i vanligt väte till ungefär 1 : 4 000, vilket stämmer väl med det värde, som Birge och Menzel beräknade ur atomvikterna. Emellertid ha andra forskare, som undersökt väte, fått så låga värden på deuteriumkoncentrationen som 1 : 30 000.

Den betydelsefulla särställning som vätet intager inom kemien påkallade ett ingående studium av det tunga vätets

egenskaper. Den första uppgiften blev då att utexperimentera en effektivare metod för utvinning av tungt väte. E. W. Washburn var den första, som kom på idén att skilja isotoperna genom elektrolys av vatten, varvid huvudsakligen det lätta vätet bör frigöras medan det tunga kan väntas förbli bundet. Tillsammans med Urey prövade han sig fram till de lämpligaste betingelserna härför. Utbytet av deuterium visade sig härvid bliva över förväntan stort. Anrikningen måste alltså bero icke endast på att deuteriumjonerna med sin större massa ha mindre rörlighet än de vanliga vätejonerna, utan sannolikt även på att deuterium är fastare bundet vid syre än väte är. Såsom Urey påpekat förklaras också härigenom på ett enkelt sätt de låga värden på deuteriumkoncentrationen hos vanligt väte, som några forskare erhållit, ty väte framställes vanligen tekniskt genom elektrolys, och därför har man stundom sökt isotopen i det allra olämpligaste utgångsmaterialet.

Så snart man lyckats framställa högprocentigt deuterium, vilket lättast sker genom upprepad diffusion, bestämdes atomvikten med stor precision och befanns vara 2,01363 hänförd till $O^{16} = 16$.

Det var en lycklig tillfällighet, att på det institut, där G. N. Lewis för första gången anrikade väteisotopen till stor koncentration, det fanns en anordning för framställning av utomordentligt snabba jonstrålar. Vid användning av denna för atomsprängningsförsök med deutonstrålar erhölls en oanad stor sprängverkan, vilken torde ha sin förklaring däri, att den tunga deutonen, när den kommit in över potentialtröskeln i en kärna, stannar där längre än den lätta protonen och som följd därav framkallar större strålningsutbyte. Då dessutom varje kärnträff för till nya kärnreaktioner, har deutonen kommit att bliva ett av de viktigaste hjälpmedlen för studiet av kärnreaktioner. Vid sprängning av litiumatomen med deutonstrålar erhållas karakteristiska strålar med en mycket stor räckvidd. Detta förhållande möjliggör bland annat en snabb uppskattning av deuteriumkoncentra-

tionen i H-D-blandningar. Med hjälp av deutonstrålar har det också lyckats att på konstgjord väg framställa radioaktiva ämnen. Vid flera dylika kärnreaktioner utsändas också neutron- och positron-strålar.

Utsättes deuterium självt för bestrålning med deutonstrålar, så inträder — vilket genom Wilson-upptagningar och masspektrografiska undersökningar påvisats — följande reaktioner:

$$ {}_1D^2 + {}_1D^2 = {}_1H^1 + {}_1H^3 $$
$$ {}_1D^2 + {}_1D^2 = {}_2He^3 + {}_0n^1 \quad ({}_0n^1 = \text{neutron}). $$

Härigenom har alltså existensen av en väteisotop med massan 3 fastslagits.

J. J. Thomson har i en notis i Nature 1934 påpekat, att han redan 1911 funnit linjer i ett fotogram, upptaget med hans s. k. parabelmetod, svarande mot atomer med laddningen 1 och massorna 2 och 3. Thomson anser också, att vätet har isotoper med ännu större massa.

Liksom alla tvåatomiga molekyler, som äro uppbyggda av 2 identiska komponenter, har väteisotopen en orto- och en paramodifikation. De undersökningar, som utförts rörande dessa modifikationers förekomst vid olika temperatur ge vid handen, att det råder en mycket stor olikhet mellan proterium och deuterium. Hos $H_2$ försvinner vid mycket låga temperaturer ortomodifikationen, under det att den för $D_2$ där är den enda stabila. Av de mätningar, som vidtagits framgår också, att H-kärnan följer Fermi-Dirac-statistiken, medan däremot D-kärnan följer Bose-Einstein-statistiken och att kärnspinnet hos D-kärnan sålunda sannolikt har värdet 1.

Såsom redan verkställda undersökningar ge vid handen, är det tunga vätets betydelse för bandspektroskopiska arbeten utomordentligt stort, därigenom att det möjliggör ökning till det dubbla av massan hos en av komponenterna i väteföreningar utan att andra faktorer ändras.

Isotopers kemiska egenskaper äro i regel identiska. Endast

reaktionshastigheten hos de kemiska processerna och föreningarnas bindningsenergi röna inflytande av olikheterna i massa. Emedan dessa vanligen äro procentuellt små, bli också i regel de kemiska egenskaperna praktiskt taget desamma. Hos vätet, vars isotoper ha mycket olika atomvikt, kan man dock vänta stora olikheter i kemiskt avseende.

Egenskaperna hos den viktigaste deuteriumföreningen, tungt vatten, visa sig också i mycket hög grad avvika från det vanliga vattnets. Dess täthet är 1,1059. Det fryser vid 3°,82 C och kokar vid 101°,42. Sin maximala täthet har det vid 11°,60. Deuteriumjonens rörlighet är endast $^2/_3$ av vätejonens, och även andra joner röra sig avsevärt sämre i tungt vatten än i vanligt.

Det tunga vattnets fysiologiska verkningar ha också ingående undersökts, och det har visat sig, att rent $D_2O$ icke har förmåga att underhålla livsprocesser. Över den verkan, som $D_2O$ i utspädd lösning har på organismer, föreligger dock endast fragmentariska undersökningar.

Olikheterna i kemiskt avseende mellan väteisotoperna ha visat sig vara utomordentligt värdefulla för konstitutionskemien, där de redan utnyttjats på många skilda sätt och lämnat synnerligen vackra resultat.

Om man också ännu svävar i okunnighet om denna upptäckts betydelse för medicinska och andra rent praktiska ändamål, är det dock redan nu uppenbart, att den utgör begynnelsen av ett nytt skede i kemiens utveckling.

*K.-E. Fylking.*

# Några iakttagelser om pytagoreiska trianglar.[1]

Av NAT. BECKMAN.

Att lektor Wahlgren[2] hörsammade min inbjudan till »kunnigare läsare» att ge ett »genetiskt» resp. »direkt» bevis för min med väl stor omständlighet behandlade 5-talsregel, har varit mig en tillfredsställelse både därigenom, att hans utredning givit ett mer generellt resultat, än jag tänkte, och därigenom, att det visat sig, att talteori i strängare mening, alltså en teori, som gick utanför mina förutsättningar, erfordrades. Det är väl minst fem år, som min uppsats vilat i skrivbordslådan i väntan på att ett bevis med bruk av blott skolkursen + en smula kedjebråk skulle kunna utfinnas. Exempel på höjder med brutna tal som mätetal finnas rikligt i mitt material, där ju varje triangel har tre höjder. De ge alla multipeltrianglar med en faktor gemensam för alla sidor.

I det hela får jag mera mod att lägga fram resultat, som med mina förutsättningar blott kunna bli preliminära men som kanske kunna locka flere »kunnigare läsare» att intressera sig för det problem, jag roat mig med. Ett par små kompletteringar må därför här finna sin plats.

Jag förstod på min vän Arvid Lindhagen, att min metod att söka konvergenter till vissa irrationella tal genom att verkställa divisioner med deras i decimalbråk tabulerade närmevärden på en matematiker av facket gjorde intrycket av väl långt gången dilettantism. Mitt försvar har antytts men skall här få en mer generell form.

[1] En efterskörd till min uppsats i denna tidskrift årg. *16*, sid. 211 ff.

[2] Denna tidskrift årg. *17*, sid. 5 ff.

Den direkta kedjebråksutvecklingen ger mycket snart resultat, som å ena sidan äro onödigt noggranna för mina ändamål, å andra sidan röra sig med större tal än önskvärt. Låt oss ta ett exempel.

Problem 4. Sök en pytagoreisk triangel, vars ena spetsiga vinkels sinus är $\frac{1}{p}$. Man får i följd:

$$p(a^2 - b^2) = a^2 + b^2; \quad a^2(p-1) = b^2(p+1);$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{p+1}{p-1} = \frac{p^2-1}{(p-1)^2}.$$

Första konvergenten för $\frac{a}{b}$ blir tydligen $\frac{p - \frac{1}{2p}}{p-1} = \frac{2p^2-1}{2p^2-2p}$.

Den triangel, som härav erhålles blir:

$$(8p^4 - 8p^3 - 4p^2 + 4p), \quad (8p^3 - 8p^2 + 1), \quad (8p^4 - 8p^3 + 1).$$

Det är uppenbart, att man omedelbart kommit till en mycket stor noggrannhet. Om man dividerar hypotenusan med den senare kateten, så blir kvoten $p - \frac{p-1}{8p^3 - 8p^2 + 1}$ eller för något större $p$-värden praktiskt taget $p - \frac{1}{8p^2}$. Redan om $p$ sättes $= 5$, får man i första omgången felet till 0,005 ungefär. Men så får man också sidorna delvis uttryckta i 4-siffriga tal 801, 3920, 4001. Och det kan ibland vara nog med mindre. En sådan triangel som 20, 99, 101 är ju för skolbruk inte att förakta såsom approximation till en triangel med en vinkel $=$ arc sin 0,2. Och den framkommer genom enklare räkningar.

Problem 5 blir ett exempel till Problem 3 men medtages av särskilda skäl. Vi formulera det så: Sök de pytagoreiska trianglar, vilkas minsta vinkel $v_1$ närmar sig 12°.

Vi uträkna $\frac{1 + \sin 12^\circ}{\cos 12^\circ} = 1{,}235$, vilket ger en snabb konvergens:

Vi ge omedelbart tabellen:

| Konvergenter. | Trianglar. | $v_1$ |
|---|---|---|
| $^1/_1$ | förkastas | |
| $^5/_4$ | 40, 9, 41 | $12^\circ\,41'$ |
| $^{16}/_{13}$ | 416, 87, 425 | $11^\circ\,49'$ |
| $^{21}/_{17}$ | 357, 76, 365 | $12^\circ\,1'$ |

Det vid första påseendet paradoxala resultatet är, att den fjärde konvergenten ger mindre tal men större noggrannhet. Sådant kan inträffa, om den $n$-te konvergenten har ett udda och ett jämnt tal, och alltså får behandlas efter formeln $2ab$, $(a^2 - b^2)$, $(a^2 + b^2)$, medan den $(n + 1)$sta är bildad med delkvoten 1 och har två udda tal, som få behandlas enligt formeln $ab$, $\frac{a^2 - b^2}{2}$, $\frac{a^2 + b^2}{2}$.

Problem 6. Ett problem, som Lindhagen och jag kommo att snudda vid men aldrig behandla, var detta: Sök en rationell triangel, vars sidor utgöras av tre konsekutiva tal.

Av vad som förut visats, framgår, att det mellersta talet måste vara ett jämnt tal. Vi teckna det $2x$. Sidorna bli då

$$(2x - 1),\ 2x,\ (2x + 1).$$

Arean blir enligt Herons formel $= x\sqrt{3(x^2 - 1)}$. Att kvadratroten i det sista uttrycket blir triangelns höjd mot sidan $2x$, är ju uppenbart. För att denna rot skall kunna bli rationell, fordras två ting:

1:o. $x^2 - 1$ måste innehålla faktorn 3. Detta villkor satisfieras av varje $x$-värde, som självt icke är delbart med 3.

2:o. Kvoten, då 3 utdivideras, skall vara en jämn kvadrat, m. a. o. $\frac{x^2 - 1}{3} = y^2$ eller $\frac{x^2 - 1}{y^2} = 3$.

Med förnyad hemställan till kunnigare läsare att anvisa en elegantare lösning ger jag följande:

Från Problem 2 erinra vi oss två serier med närmevärden till $\sqrt{3}$, alltså approximativa lösningar till ekvationen $\frac{x^2}{y^2} = 3$. Sistnämnda ekvation har ingen exakt lösning, men i bråkets omedelbara grannskap böra finnas bråk, som noggrant satisfiera ekvationen. Som täljare kommer $x^2 - 1$ närmast i betraktande, ty det är delbart med 3, såvida icke ett värde på $x$ skulle framkomma, som självt vore delbart med 3. Närmast komma $x^2 + 2$ och $x^2 - 4$. Det lönar sig att göra ett försök med den senare, exaktare serien av konvergenter, vilken bildats enligt formeln $\sqrt{a^2 - 1} = a - \cfrac{1}{2a - \cfrac{1}{2a \ldots}}$. Blott täljarna komma till användning; de utgöra värden på $x$. Som bevis, att problemet lösts, ange vi också höjden, $h$.

| $x$ | Trianglar | $h$ |
|---|---|---|
| 2 | 3, 4, 5 | 3 |
| 7 | 13, 14, 15 | 12 |
| 26 | 51, 52, 53 | 45 |
| 97 | 193, 194, 195 | 168 |
| 362 | 723, 724, 725 | 627 |

De i detta sammanhang uppvisade trianglarna bli ju rätt nära liksidiga, alltså behändiga att rita upp, och de bli, som mig synes, trevliga exempel till bl. a. kosinusteoremet.

Man kan också försöka med de mindre exakta konvergenter, som möta i den första men icke i den andra serien, $\frac{5}{3}$ och $\frac{19}{11}$. Det visar sig, att det här är $x^2 + 2$, som kan delas med 3 och ge en jämn kvadrat till kvot. Vi få alltså ett irrationellt värde på $h$.

De användbara $x$-värdena bilda en serie, där den $(n+1)$sta

termen bildas av de föregående enligt formeln $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$.[1] — Utanför denna serie finnas inga $x$-värden, som ge en rationell triangel av formen $(2x - 1)$, $2x$, $(2x + 1)$.

*Anm.* Den exaktare lösning, som ovan efterlysts, har redan anvisats av Red. genom hänvisning till PELLS metod att behandla ekvationen

$$x^2 - ay^2 = 1, \text{ i vårt fall } x^2 - 3y^2 = 1.$$

Ekvationen kan också skrivas under formen

$$(x - y\sqrt{a})(x + y\sqrt{a}) = 1.$$

Om den senare ekvationen gäller, så gäller också

$$(x - y\sqrt{a})^n (x + y\sqrt{a})^n = 1.$$

De två faktorerna komma ju ständigt att innehålla samma termer, blott med motsatt tecken för de udda digniteterna av $\sqrt{a}$, resp. den irrationella term, som utgör dessas summa. Om man nu känner ett rotpar (t. ex. den första konvergenten i en påbörjad kedjebråksutveckling), i vårt fall $x = 2$, $y = 1$ och vill söka de följande, har man blott att upphöja endera parentesen till olika digniteter. sålunda beräkna $(2 + \sqrt{3})^2$, $(2 + \sqrt{3})^3$ o. s. v. Värdena bli desamma som vid (fortsatt) kedjebråksutvecklingen men räkningarna betydligt lättare att överblicka. Så t. ex. ser man genast, att för varje ny dignitet vid bildandet av den rationella termen till ett med 3 icke delbart tal lägges ett annat, som är delbart med 3, vadan alltså den förut ifrågasatta möjligheten, att något $x$-värde skulle kunna bli delbart med 3, aldrig blir verklighet.

[1] Som synes gäller samma regel för höjderna.

# Om figurer med rationella bestämningsdelar.

Av NILS KUYLENSTIERNA.

1. De problem rörande figurer med rationella bestämningsdelar, som här skola behandlas, ha den egenskapen gemensam, att vart och ett av dem, skrivet under algebraisk form, leder till en ekvation av andra graden med två obekanta $x$ och $y$ och rationella koefficienter

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Det gäller att finna rationella lösningar till denna ekvation. Har ekvationen en i $x$ och $y$ rationell lösning, så har den oändligt många, och i det särskilda geometriska problem som föreligger är det ofta lätt att finna en sådan lösning. Om man funnit en lösning, är ej svårt finna de övriga. Jag lånar här en metod, som FELIX KLEIN angivit i sitt arbete *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* i det speciella fall, då det gäller att beräkna de s. k. pytagoreiska talen. En i sak likartad men till utförandet något skiljaktig metod har använts av C. BODLUND och A. WAHLGREN i *En diofantisk ekvation av tredje graden* (i junihäftet 1934 av denna tidskrift), som hämtat metoden från en talteoretisk lärobok av DICKSON.[1]

Det förutsättes då, att $x = \xi$, $y = \eta$ är en rationell lösning till ekvation (1), och det begäres att finna övriga rationella lösningar; $x$ och $y$ betraktas som koordinater i ett rätvinkligt koordinatsystem. Då framställer (1) ett kägelsnitt, och om en punkt i planet med rationella koordi-

[1] Min uppsats var väsentligen författad före junihäftets publicering.

nater säges vara rationell, så är $(\xi, \eta)$ en rationell punkt på kägelsnittet. Vi kalla den *fixpunkten* och lägga genom den en rät linje

$$y - \eta = k(x - \xi). \tag{2}$$

Om $(x, y)$ är en rationell punkt, har tydligen vinkelkoefficienten $k$ rationellt värde. Vi uppsöka koordinaterna $x$ och $y$ för linjens andra skärningspunkt med kägelsnittet. Om det ur (2) erhållna $y$-värdet insättes i (1), erhålles en ekvation i $x$, vars vänstra membrum satt lika med 0 är delbart med $x - \xi$. Efter några enkla räkningar erhålles

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi(k^2C - A) - 2\eta(B + kC) - 2D - 2kE}{A + 2kB + k^2C} \\ y &= \frac{-2k\xi(A + kB) + \eta(A - k^2C) - 2kD - 2k^2E}{A + 2kB + k^2C} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Härav framgår, att om $k$ har ett rationellt värde, så är $(x, y)$ en rationell punkt på kägelsnittet. Om den räta linjen (2) vrider sig omkring fixpunkten $(\xi, \eta)$, så kommer mot varje rationellt värde på vinkelkoefficienten $k$ att svara en rationell skärningspunkt på kägelsnittet, och omvänt erhålles på detta sätt varje rationell punkt på kägelsnittet. De rationella punkterna på kägelsnittet komma alltså att överallt ligga oändligt tätt.

Sedan den allmänna formen för de rationella lösningarna är funnen, övergå vi till tillämpningarna.

2. *Problem I. Att finna alla trianglar med en given vinkel, där sidornas mätetal äro rationella.*

Längdenheten kan väljas godtyckligt, och den triangelsida, som står emot den givna vinkeln $\gamma$, sättes $= 1$. Kallas de omfattande sidorna $x$ och $y$ och sättes $\cos\gamma = r$, så ger cosinusteoremet

$$x^2 + y^2 - 2rxy = 1. \tag{4}$$

Härav framgår först, att $r$ nödvändigt måste vara rationellt. Vidare inses, att varje rationellt positivt värdepar $x$

och $y$, som statisfierar ekvationen, också ger en lösning av vår uppgift, förutsatt att $-1 < r < 1$.

Ekvationen (4) är ekvationen för en ellips med centrum i origo, vars axelriktningar dela vinklarna mellan koordinataxlarna mitt i tu. När $r$ varierar mellan gränserna 1 och $-1$, ändrar ellipsen form, men den passerar alltid genom de fyra punkter på koordinataxlarna, som ligga på avståndet 1 från origo. Till fixpunkt väljes punkten $(-1, 0)$. Den räta linjen (2) antar formen

$$y = k(x + 1), \tag{5}$$

och genom insättning i (4) eller enkel direkt uträkning finner man koordinaterna för kägelsnittets rationella punkter

$$x = \frac{1 - k^2}{k^2 - 2kr + 1}, \quad y = \frac{2k(1 - kr)}{k^2 - 2kr + 1}. \tag{6}$$

Positiva värden på $x$ och $y$ erhålles, om $0 < k < 1$, som lätt kontrolleras, om figur uppritas. Om speciellt $r = 0$, blir triangeln rätvinklig, och ellipsen reduceras till en cirkel. Det är detta fall, som KLEIN behandlat på angivet ställe.

3. Utgående från en triangel med sidorna 1 samt $x$ och $y$ definierade av (6) skola vi nu bilda en därmed likformig triangel med heltalssidor. Det visar sig lämpligt göra följande substitutioner.

$$r = \frac{s - t}{s + t}, \quad k = \frac{m - n}{m + n}. \tag{7}$$

Här antagas $s$, $t$, $m$, $n$ vara hela pos. tal och $m > n$. Vidare förutsättas $s$ och $t$ relativt prim och likaså $m$ och $n$. Härigenom bestämmas dessa tal entydigt ur $r$ resp. $k$. Man finner efter en del förenklingar, att högra membra i (6) bli

$$\frac{mn(s + t)}{n^2 s + m^2 t}, \quad \frac{(m - n)(ns + mt)}{n^2 s + m^2 t}.$$

Vi sätta nu

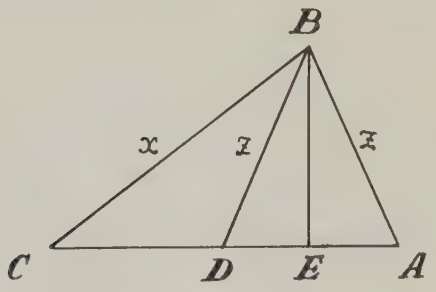
$$\left.\begin{aligned} x &= mn(s+t) \\ y &= (m-n)(ns+mt) \\ z &= n^2 s + m^2 t \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Här användas $x$ och $y$ i något olika mening mot förut, men någon förväxling torde ej behöva riskeras. De hela talen $x$, $y$, $z$ äro mätetal för sidorna i en triangel, och $z$ står mot den givna vinkeln $\gamma$. Algebraiskt sett ha $x$, $y$, $z$ ingen faktor gemensam, vilket ej hindrar, att de kunna ha det för speciella värden på $s$, $t$, $m$, $n$. Är största gemensamma divisorn $a$, kan man sätta

$$a\bar{x} = x,\ a\bar{y} = y,\ a\bar{z} = z; \qquad (9)$$

$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ äro relativa primtal samt mätetal för sidor i en med den förra likformig triangel.

Om $x > z$, vilket enl. (8) inträffar, om $^s/_t > {}^m/_n$, så finns det två trianglar, som överensstämma med varandra i en gemensam vinkel $\gamma$, en bredvid denna liggande sida $x$ och med de motstående sidorna båda $z$. De mot $x$ stående vinklarna i de båda trianglarna äro varandras supplementvinklar, och de båda andra bredvid $\gamma$ liggande sidorna i allmänhet olika (de bli lika, endast om de mot $x$ stående vinklarna båda äro räta).




I figuren är $\angle ACB = \gamma$. De båda trianglarna äro $ABC$ och $BCD$. Vi få tänka oss, att $m$ och $n$ ha vissa bestämda

värden. Då erhålles ur (8) värdet på $y$. Kommer i figuren $y$ att framställas av $AC$ eller av $CD$? Som vi strax skola se, beror detta på värdet av $^m/_n$. En av sträckorna är i varje fall $y$; den andra beteckna vi med $y_1$. Den för trianglarna gemensamma höjden $BE$ mot $AC$ drages. Då är

$$\frac{1}{2}(y + y_1) = CE = x \cos \gamma = x \cdot \frac{s - t}{s + t} = mn(s - t),$$

$$y_1 = 2mn(s - t) - y = 2mn(s - t) - (m - n)(ns + mt),$$

varav

$$y_1 = (m + n)(ns - mt). \qquad (10)$$

Vidare är

$$AE = DE = \pm \frac{1}{2}(y - y_1) = \pm (m^2 t - n^2 s).$$

Man finner, att $y > y_1$, om $^s/_t < {}^{m^2}/_{n^2}$. Då är

$$y = AC, \quad y_1 = CD.$$

Är tvärtom $^s/_t > {}^{m^2}/_{n^2}$, så måste $y$ och $y_1$ byta plats. För $s = m^2$, $t = n^2$, blir $y = y_1$.

Triangeln med heltalssidor $x$, $y_1$, $z$ innehåller ju liksom triangeln $x$, $y$, $z$ vinkeln $\gamma$, och dess sidor måste alltså även kunna (bortsett från en gemensam rationell faktor) skrivas under formen (8) fastän med andra värden $m'$ och $n'$ på $m$ och $n$ än för triangeln $x$, $y$, $z$. I själva verket får man sätta

$$bm' = sn, \quad bn' = tm,$$

där $b$ är största gemensamma divisorn till $sn$ och $tm$. Då befinnes nämligen

$$\left.\begin{aligned} m'n'(s + t) &= \frac{1}{b^2} \cdot mnst(s + t) &&= \frac{st}{b^2} \cdot x \\ (m' - n')(n's + m't) &= \frac{1}{b^2} \cdot st(m + n)(ns - mt) &&= \frac{st}{b^2} \cdot y_1 \\ n'^2 s + m'^2 t &= \frac{1}{b^2} \cdot st(m^2 t + n^2 s) &&= \frac{st}{b^2} \cdot z \end{aligned}\right\}.$$

Vi ha sålunda sett, att trianglar med heltalssidor innehållande vinkeln $\gamma$ kunna paras ihop två och två. Men härvid förutsattes, att $x > z$. Innebär inte detta en inskränkning, så att vissa former av trianglar med heltalssidor uteslutas? Som vi skola bevisa, är detta dock ej fallet. Vi anta då, att för ett visst värdepar $m$, $n$ är $z$ större än $x$ i formlerna (8). Betecknas den mot sidan $x$ stående vinkeln $\alpha$, så har ju enligt cosinusteoremet $\cos \alpha$ ett rationellt värde. I själva verket är

$$\frac{AE}{AB} = \cos \alpha = \frac{m^2 t - n^2 s}{m^2 t + n^2 s}. \tag{11}$$

Sättes

$$\cos \alpha = \frac{s_1 - t_1}{s_1 + t_1},$$

så blir

$$\frac{s_1}{t_1} = \frac{m^2 t}{n^2 s}.$$

Vi skriva

$$cs_1 = m^2 t, \quad ct_1 = n^2 s,$$

där $c$ är största gemensamma divisorn till $m^2t$ och $n^2s$. Vi beräkna därefter med hjälp av (8) en triangel med vinkeln $\alpha$, då $s$ och $t$ alltså ersättas med $s_1$ och $t_1$; $m$ och $n$ få behålla sina värden. Vi sätta

$$\left.\begin{aligned} x' &= mn\,(s_1 + t_1) = \frac{1}{c} \cdot mn(n^2 s + m^2 t) &&= \frac{mn}{c} \cdot z \\ y' &= (m - n)\,(ns_1 + mt_1) = \frac{1}{c} \cdot mn(m - n)(ns + mt) &&= \frac{mn}{c} \cdot y \\ z' &= n^2 s_1 + m^2 t_1 = \frac{1}{c} \cdot mn \cdot mn(s + t) &&= \frac{mn}{c} \cdot x \end{aligned}\right\}.$$

Således ha vi ur formlerna (8) erhållit en triangel likformig med den givna, men för vilken $x' > z'$.

4. Den första av formlerna (7) samt formeln (11) ge oss, om vi vidare beakta, att $\cos\gamma = r$,

$$\frac{s}{t} = \frac{1+\cos\gamma}{1-\cos\gamma}, \quad \frac{m^2 t}{n^2 s} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

varav

$$\frac{s}{t} = \cot^2\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{m^2 t}{n^2 s} = \cot^2\frac{\alpha}{2},$$

eller

$$\frac{s}{t} = \cot^2\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{m}{n} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}. \tag{12}$$

Den så funna trigonometriska betydelsen av de båda bråken $^s/_t$ och $^m/_n$ ger oss anledning till att framställa ännu en metod att härleda formlerna (8), helt olika den som ovan följts.

I en triangel med rationella sidor $x$, $y$, $z$ betecknas de motstående vinklarna resp. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Triangelns omkrets kallas $2p$ och inskrivna cirkelns radie $\varrho$. Då gälla de kända formlerna

$$p-x = \varrho\cot\frac{\alpha}{2}, \quad p-y = \varrho\cot\frac{\beta}{2}, \quad p-z = \varrho\cot\frac{\gamma}{2}. \tag{13}$$

Enligt cosinusteoremet har $\cos\gamma$ ett rationellt värde, som vi antaga vara givet. Då har även $\cot^2\frac{\gamma}{2}$ ett känt rationellt värde. Vi sätta

$$\cot^2\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{t}, \tag{14}$$

där $s$ och $t$ äro hela pos. tal, rel. prim. Vidare är $p-z$ rationellt, och av den sista av formlerna (13) följer, att $\varrho^2$

är rationellt. Detsamma är alltså enl. (13) fallet med produkten $\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$, så att

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{m}{n}, \tag{15}$$

där $m$ och $n$ äro hela pos.tal, rel. prim. Talen $m$ och $n$ kunna väljas godtyckligt med den inskränkningen, att $m>n$. Ty av formeln

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} \tag{16}$$

följer

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}}{\cot\frac{\beta}{2}}+1>1.$$

Genom insättning av (14) och (15) i (16) erhålles efter några enkla beräkningar

$$\cot\frac{\beta}{2}=\frac{ns+mt}{s(m-n)}\cdot\sqrt{\frac{s}{t}}. \tag{17}$$

Formlerna (13) kunna även skrivas

$$\left.\begin{aligned} x&=\varrho\left(\cot\frac{\gamma}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)\\ y&=\varrho\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\right)\\ z&=\varrho\left(\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}\right\}. \tag{13 a}$$

Insättas här värdena på cotangenterna, erhålles

$$\frac{x}{z}=\frac{mn(s+t)}{n^2s+m^2t},\quad \frac{y}{z}=\frac{(m-n)(ns+mt)}{n^2s+m^2t}.$$

Är $R$ en rationell faktor, fås de med (8) ekvivalenta formlerna

$$Rx = mn(s + t),\quad Ry = (m - n)(ns + mt),\quad Rz = n^2 s + m^2 t.$$

5. *Problem II. Att finna alla trianglar, vilkas sidor och yta framställas genom hela tal.*

Sådana trianglar kallas *heltalstrianglar*. Detta problem kan betraktas som en specialisering av det föregående. Ur figuren erhålles för höjden $h$ mot $AC$

$$h^2 = \overline{BE}^2 = x^2 - \overline{CE}^2 = x^2 - \left(x\frac{s-t}{s+t}\right)^2 =$$

$$= m^2 n^2 (s + t)^2 - m^2 n^2 (s - t)^2 = 4m^2 n^2 st;\ \because h = 2mn\sqrt{st}.$$

De hela talen $s$ och $t$ äro relativt prim, och villkoret för att höjden $h$ och därmed triangelytan skall vara hel, är då, att

$$s = \sigma^2,\quad t = \tau^2,$$

där $\sigma$ och $\tau$ äro hela positiva tal, som äro relativt prim. Man finner alltså

$$h = 2mn\sigma\tau,$$

och formlerna (8) få utseendet

$$\left.\begin{aligned} x &= mn(\sigma^2 + \tau^2) \\ y &= (m - n)(n\sigma^2 + m\tau^2) \\ z &= n^2\sigma^2 + m^2\tau^2 \end{aligned}\right\}. \qquad (18)$$

Triangelytan blir

$$\frac{1}{2}yh = mn\sigma\tau(m - n)(n\sigma^2 + m\tau^2).$$

För tydlighets skull erinras om, att talen $m$, $n$, $\sigma$, $\tau$ äro hela, pos.; $m > n$, $m$ och $n$ äro rel. prim, $\sigma$ och $\tau$ äro rel. prim, och är $\gamma$ den mot $z$ stående vinkeln, så är

$$\cos\gamma = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Som förut nämnt, kunna i speciella fall gemensamma faktorer förekomma.

Formlerna (8), ur vilka systemet (18) härletts, uppställdes under förutsättning, att $\cos\gamma$ hade ett känt rationellt värde. Att denna vinkel liksom framhävts på de övrigas bekostnad, medför, att systemet (18) är något osymmetriskt. Mer symmetriska formler kan man komma till genom följande enkla substitution

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu\sigma}{\nu\tau}, \quad (\mu\sigma > \nu\tau);$$

$\mu$ och $\nu$ äro hela pos. tal och rel. prim. Man finner

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n^2\sigma}{\nu^2\tau}\cdot\mu\nu(\sigma^2+\tau^2)\\ y &= \frac{n^2\sigma}{\nu^2\tau}\cdot(\mu\sigma-\nu\tau)(\nu\sigma+\mu\tau)\\ z &= \frac{n^2\sigma}{\nu^2\tau}\cdot\sigma\tau(\mu^2+\nu^2) \end{aligned}\right\}.$$

Bortsett från gemensam heltalsfaktor kunna då sidorna i en heltalstriangel skrivas

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu\nu(\sigma^2+\tau^2)\\ Y &= (\mu\sigma-\nu\tau)(\nu\sigma+\mu\tau)\\ Z &= \sigma\tau(\mu^2+\nu^2) \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

I själva verket blir triangelytan

$$T = \mu\sigma\nu\tau(\mu\sigma-\nu\tau)(\nu\sigma+\mu\tau). \tag{20}$$

Vi vilja söka anknytning till cotangentformlerna i avdelning 4. Formlerna (12) komma här att bli

$$\cot\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma}{\tau}, \quad \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\mu}{\nu}. \tag{21}$$

Genom en metod analog med den, varmed formlerna (8) härleddes i avdelning 4, hade även formlerna (19) kunnat erhållas, som här i korthet skall visas. På grund av for-

meln $T = \varrho p$ är $\varrho$ rationellt, och detsamma måste då enl. (13) vara fallet med $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\beta}{2}$, $\cot\frac{\gamma}{2}$. Vi utgå från (21) och få av (16)

$$\cot\frac{\beta}{2} = \frac{\nu\sigma + \mu\tau}{\mu\sigma - \nu\tau}.$$

Formlerna (13 a) ge oss

$$\frac{x}{z} = \frac{\mu\nu(\sigma^2 + \tau^2)}{\sigma\tau(\mu^2 + \nu^2)}, \quad \frac{y}{z} = \frac{(\mu\sigma - \nu\tau)(\nu\sigma + \mu\tau)}{\sigma\tau(\mu^2 + \nu^2)},$$

varav omedelbart erhålles systemet (19).

Den sistnämnda metoden för beräkning av sidorna i en heltalstriangel förekommer i princip hos WEBER-WELLSTEIN, *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, vierte Auflage, 1922. Formlerna (19) finnas dock ej där.

Varje heltalstriangel kan som bekant erhållas genom sammanställning av rätvinkliga heltalstrianglar.[1] Vi skola se, vad våra formler ge oss i detta avseende. Av figuren framgår genast, att de båda trianglarna *ABC* och *BCD* kunna bildas genom sammanställning av de rätvinkliga trianglarna *BCE* och *ABE*. Här anföras dessa trianglars sidor:

$$\left.\begin{aligned} BE &= 2\mu\nu\sigma\tau \\ CE &= \mu\nu(\sigma^2 - \tau^2) \\ BC &= \mu\nu(\sigma^2 + \tau^2) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} BE &= 2\mu\nu\sigma\tau \\ AE &= \pm\,\sigma\tau(\mu^2 - \nu^2) \\ AB &= \sigma\tau(\mu^2 + \nu^2) \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

6. *Problem III. Att finna alla fyrhörningar med rationella sidor och diagonaler, som kunna inskrivas i cirklar.*

En diagonal antages vara $= 1$. Denna är bas i två trianglar med toppvinklar respektive $\gamma$ och $180^\circ - \gamma$. Liksom i problem I sättes $\cos\gamma = r$, och $r$ måste vara rationellt. För de sidor, som omfatta vinkeln $\gamma$, gälla formlerna (6). För

[1] Angående denna och andra frågor rörande rationella trianglar hänvisas till arbeten i denna tidskrift av LINDHAGEN (årg. *3*), MEBIUS (*16*), BECKMAN (*16*), WAHLGREN (*17*).

de sidor, som omfatta vinkeln $180^\circ - \gamma$, gälla i analogi med (6) bildade formler

$$z = \frac{1 - k_1^2}{k_1^2 + 2k_1 r + 1}, \quad u = \frac{2k_1(1 + k_1 r)}{k_1^2 + 2k_1 r + 1}.$$

Enligt den Ptolemeiska satsen blir den andra diagonalen

$$g = xz + uy$$

också rationell.

Fyrhörningens yta är rationell, om även $\sin \gamma$ är rationell. Detta inträffar, om man kan sätta

$$\cos \gamma = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}, \quad \sin \gamma = \frac{2\sigma\tau}{\sigma^2 + \tau^2},$$

där $\sigma$ och $\tau$ äro hela positiva och rel. prim.

Av utrymmesskäl medtages blott ett enda exempel

$$r = \frac{3}{5}, \quad k = \frac{1}{2}, \quad k_1 = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{15}{13}, \quad y = \frac{14}{13}, \quad z = \frac{15}{37}, \quad u = \frac{26}{37},$$

$$g = \frac{589}{481}, \quad \text{ytan} = \frac{141360}{231361}.$$

Att från fyrhörningar med rationella sidor och diagonaler övergå till sådana, där de motsvarande mätetalen äro hela tal, vållar nu inga särskilda svårigheter, men det bleve för vidlyftigt att här uppskriva formlerna.

7. *Problem IV. Att finna alla parallellogrammer med rationella sidor och diagonaler.*

Två bredvidliggande sidor vare $a$ och $b$, där $a \leqq b$. Betecknas diagonalerna med $x$ och $y$, så erhålles ekvationen

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Detta är en cirkel med centrum i origo. (Läsaren anmodas att själv upprita figur.) Det är lätt att finna rationella punkter på denna cirkel. En sådan är

$$\xi = a - b, \quad \eta = -a - b.$$

Denna tages till fixpunkt $A$. En linje genom denna punkt har ekvationen

$$y + a + b = k(x - a + b).$$

Koordinaterna för denna linjes andra skärningspunkt med cirkeln befinnas vara

$$\begin{aligned} x &= \frac{(a-b)(k^2-1) + 2k(a+b)}{k^2+1}, \\ y &= \frac{(a+b)(k^2-1) - 2k(a-b)}{k^2+1}. \end{aligned} \tag{23}$$

De rationella punkterna på cirkeln erhållas genom att låta $k$ antaga alla möjliga rationella värden. Men nu skola $x$, $a$, $b$ vara sidor i en triangel och likaså $y$, $a$, $b$. Detta innebär dels, att $x$ och $y$ skola vara positiva och dels, att $x$ och $y$ båda skola ligga mellan gränserna $a - b$ och $a + b$. Av figuren framgår, att den räta linjen genom $A$ skall falla mellan två ytterlägen, vilket medför villkoret $k > {}^{a}/_{b}$.

I själva verket äro de lösningar till ifrågavarande problem, som givas av formlerna (23), alldeles desamma, som på annat sätt härletts av rektor J. S. Hedström i årg. *15* av denna tidskrift. Den storhet han betecknat med $z$ är precis vår vinkelkoefficient $k$ och får alltså en ej ointressant geometrisk tolkning. Hade man utgått från någon annan fixpunkt, hade man fått en lösning, som varit formellt olika men naturligtvis i sak likabetydande.

---

# Om normalformen för den räta linjens ekvation och avståndet från en punkt till en rät linje.

Av C. E. SJÖSTEDT.

Intet område inom den gamla reallinjens kurs i analytisk geometri torde erbjuda så stora svårigheter i pedagogiskt hänseende som det, som behandlar den räta linjens normalform och därmed sammanhängande saker. Det är därför förklarligt, att våra läroböcker försöka sig på olika behandlingsmetoder. Av samma anledning kanske efterföljande rader kunna påräkna något intresse.

Anledningen till att området ifråga erbjuder svårigheter torde väl vara den, att man ej kan genomföra en generell härledning av normalformen resp. avståndsformeln, utan härledningen måste kompletteras i ena eller andra avseendet. Härav följer, att teckenreglerna vid reduktion till normalform resp. vid avståndsformeln kunna bli omständiga att härleda och besvärliga att minnas. Olika läroböcker ha förtjänster än i det ena, än i det andra hänseendet, vilket väl ej här behöver närmare utredas. Ej heller torde det vara nödvändigt att här angiva, vad underteckнad tillgodogjort sig av dessa läroböckers behandling.

Efterföljande härledningar reducera de nyss nämnda, ofrånkomliga kompletteringarna till ett trivialt fall, som ej behöver medtagas, och grunda sig därvid på två omständigheter:

1) bestämning av riktningar på räta linjer,

2) användning av $y$-axelns oändlighetspunkt såsom jämförelsepunkt vid avståndsformeln.

*Normalformen.*

Om en punkt rör sig i viss riktning utefter en rät linje och dess projektion på $y$-axeln därvid rör sig i positiv riktning, så säges riktningen på linjen vara den positiva. På varje linje kan på detta sätt en positiv riktning utmärkas. Vinkeln mellan linjen och $x$-axeln blir då vinkeln mellan linjens och $x$-axelns positiva riktningar. En linje genom origo kan nu betraktas som en koordinataxel med nollpunkten i origo. En punkt på linjen har då en viss koordinat, som vi för att ha en kort benämning kunna kalla punktens $p$-koordinat, som alltså är = avståndet till origo med tecknet +, om punkten ligger på den positiva riktningen, och med tecknet —, om den ligger på den negativa riktningen.

Låt nu en godtycklig rät linje vara given, och drag genom origo normalen mot densamma. Vinkeln mellan normalen och $x$-axeln kalla vi $\alpha$, $p$-koordinaten för normalens fotpunkt kalla vi $p$. Normalens fotpunkt får då alltid de rätvinkliga koordinaterna $p\cos\alpha$, $p\sin\alpha$. Linjens vinkelkoefficient blir $-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ och dess ekvation alltså

$$y - p\sin\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(x - p\cos\alpha)$$

eller

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (1)$$

Det enda fall, för vilket denna härledning ej kan användas, är det, då linjen är parallell med $y$-axeln. I detta fall blir linjens ekvation $x - p = 0$, vilket också erhålles i ekv. (1) för $\alpha = 0$.

*Reduktion till normalform.*

Vi observera, att två egenskaper karakterisera ekv. (1) i formellt hänseende:

1) summan av kvadraterna på koefficienterna för $x$ och $y$ är = 1,

2) koefficienten för $y$ är $\geqq 0$, då ju $0 \leqq \alpha < 180^\circ$.

Härav erhållas omedelbart reglerna för reduktion till normalform av ekv. $Ax + By + C = 0$. De bli:

1) dividera med $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$,
2) välj det tecken, som gör koefficienten för $y$ positiv.

Dessa regler gälla för alla linjer utom för sådana, som äro parallella med $y$-axeln, vilket triviala fall ej behöver medtagas. (Vill man likväl göra det, så skall tydligen koefficienten för $x$ göras $= +1$.)

*Avståndsformeln.*

Denna härledes nu på vanligt sätt. Den givna linjens ekvation må vara $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$. Det sökta avståndet är $d$. Genom den givna punkten drages en linje parallell med den givna, och normalen genom origo till denna hjälplinje betraktas. Normalens vinkel med $x$-axeln blir alltid $\alpha$, $p$-koordinaten för normalens fotpunkt åter blir

1) om punkten ligger ovanför linjen: $p + d$,
2) om punkten ligger nedanför linjen: $p - d$.

För hjälplinjens ekvation erhålles alltså

1) i förra fallet: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p + d) = 0$.
2) i senare fallet: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - (p - d) = 0$.

Då dessutom den givna punkten $(x_1; y_1)$ ligger på hjälplinjen, erhålles

1) i förra fallet: $d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$,
2) i senare fallet: $d = -(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p)$.

Härav erhållas reglerna för beräkning av avståndet från en punkt till en rät linje:

1) reducera linjens ekvation till normalform,
2) insätt punktens koordinater i vänstra ledet,
3) välj tecknet +, om punkten ligger ovanför linjen, tecknet —, om punkten ligger nedanför linjen.

Det enda fall, då ovanstående härledning och regler ej gälla, är det, då linjen är parallell med $y$-axeln. Då beräknas emellertid avståndet direkt utan att någon regel behöver angivas.

---

Olägenheten vid ovanstående härledningar är givetvis, att man använder koordinater på normalen, vilket *kan* åstadkomma förvirring. Dock är väl koordinatbegreppet så pass välbekant på detta stadium, att några större svårigheter knappast behöva befaras. Vidare kan man inskränka denna användning av koordinater på normalen till själva härledningarna, om man så vill. Vid tillämpningarna behöver man ej använda koordinater, ej ens då normalens längd är given, ty man kan då skriva upp linjens ekvation under någon annan form och därefter använda avståndsformeln.

Frågan är också, om icke denna eventuella olägenhet mer än väl uppväges av de fördelar, som denna behandlingsmetod medför. Dessa fördelar äro:

1) Härledningen av normalformen omfattar alla fall utom det triviala, då linjen är parallell med $y$-axeln.

2) Samma regler gälla alltid för reduktion till normalform (alltså även om linjen går genom origo).

3) Samma regler gälla alltid för beräkning av avståndet från en punkt till en rät linje (alltså även om linjen går genom origo).

4) En för minnet enkel regel erhålles för avståndet från en punkt till en rät linje (enklare än den eller de, som vanligen angivas).

---

# En metod för syrgasframställning.

Av G. STARCK.

För framställning av den syrgas, som man behöver vid lektionerna i kemi på alla stadier, stå för närvarande väsentligen två metoder till förfogande, den första och bästa inköp av en syrgasbomb med tillhörande reducerventil, den andra upphettning av kaliumklorat-brunsten. Den förstnämnda står givetvis utanför all konkurrens, då det gäller bekvämt handhavande och möjlighet att erhålla en praktiskt taget obegränsad mängd syrgas av en efter önskan reglerbar strömstyrka. Det är också den billigaste metoden, då man endast tar hänsyn till priset för syrgasfyllningen och bortser från engångskostnaden för anskaffning av bomb och ventil. Denna kostnad är tyvärr så hög, att mindre läroanstalter av alla slag med liten syreförbrukning som regel ej anse sig vara i stånd att bära den. För dessa skolors lärare erbjuder sig endast metoden att genom upphettning av kaliumklorat framställa det tillfälligt behövliga förrådet av syre. Olägenheterna och riskerna med denna reaktion äro allför välbekanta för att här behöva framhållas. Metoden borde snarast möjligt ställas på avskrivning.

Två andra metoder, som lämna en kontinuerlig syrgasström av variabel styrka, äro dels elektrolys av natronlut, dels sönderdelning av vätesuperoxid med brunsten eller kaliumbikromat. Den förra kräver tillgång till stark likström (10 amp. ge endast c:a 70 $cm^3$ syrgas pr minut) och en specialbyggd apparat. De båda senare metoderna äro goda och bekväma, men begagna ett relativt dyrbart råmaterial, som dessutom — i fråga om vätesuperoxid — genom sin obeständighet ofta måste förnyas.

Bristen i fråga om på en gång billiga och enkla metoder för framställning av syrgas gör sig ännu mer gällande vid lärjungelaborationerna. Enkla förbränningsförsök i syrgasfyllda kolvar kan man möjligen anordna, men försök i strömmande syrgas kunna betecknas som uteslutna, då det gäller ett antal samtidigt arbetande lärjungegrupper.

Den metod, som nu skall föreslås och som av förf. begagnats vid laborationer i realskolan och på gymnasiet, är en tillämpning av ovannämnda reaktion mellan vätesuperoxid och brunsten. I stället för vätesuperoxid begagnas bariumsuperoxid, varur vätesuperoxiden frigöres med utsp. saltsyra. Man blandar sålunda bariumsuperoxid och pulvriserad brunsten och tillsätter till denna i förråd förvarade blandning saltsyra så länge syrgasutveckling önskas. Reaktionsformeln

$$BaO_2 + MnO_2 + 4\ HCl \rightarrow BaCl_2 + MnCl_2 + 2\ H_2O + O_2,$$

visar, att 1 g-mol.syre (22,4 l vid 0° och 760 mm) enligt teorien erhålles av 169,4 g $BaO_2$ och 86,9 g $MnO_2$, d. v. s. en blandning, som innehåller 2 viktsdelar $BaO_2$ på en viktsdel $MnO_2$. Reaktionen är starkt exotermisk, varför reaktionskärlet bör vara tunnväggigt, t. ex. en Erlenmeyerkolv, möjligen också en sugkolv för vakuumfiltrering, då sådana bruka vara ganska härdiga mot temperaturhöjning. Man beskickar kolven med en blandning av bariumsuperoxid och brunsten och tillsätter ur kranrör utsp. saltsyra droppvis, varvid en regelbunden syrgasutveckling erhålles. En blandning av 20 g bariumsuperoxid och 10 g brunsten, båda handelspreparat, ger ungefär 2 liter, till normaltillstånd reducerad syrgas. Gasen är fri från klor och ozon, förorenad av saltsyrestänk och damm, starkt förorenad av koldioxid. Det av författaren begagnade provet av bariumsuperoxid innehåller 12,7 % bariumkarbonat, motsvarande 14,5 $cm^3$ $CO_2$ pr 1 g superoxid, d. v. s. ungefär 15 % av syrgasen. Vid många försök spelar denna kolsyrehalt ingen roll; vid behov kan den lätt avlägsnas med fast kali.

I och för en beräkning av kostnaden för den så erhållna syrgasen gjordes analyser av handelns preparat. Bariumsuperoxiden befanns innehålla 76,7 % $BaO_2$, brunstenen 85,2 % $MnO_2$. För de vid denna och vid kloratmetoden begagnade preparaten betalas i Stockholm pr kg:

| | Handelsvara | Omräknat till 100 %-ig vara |
|---|---|---|
| För bariumsuperoxid | 3,00 kr | 3,91 kr |
| brunsten, pulver | 1,50 | 1,76 |
| kaliumklorat | 3,00 | 3,00 |
| saltsyra, 1,19 | 0,58 | 0,58 |

22,4 l syrgas kommer enligt de båda metoderna att betinga följande priser (kaliumklorat och brunsten som vanligt blandade i proportionen 2: 1):

| | |
|---|---|
| 169,4 g $BaO_2$ (100 %-ig) | 0,66 kr |
| 86,9 g $MnO_2$ » | 0,15 |
| 1 l 4-normal HCl | 0,23 |
| Summa | 1,04 kr |
| 81,7 g $KClO_3$ (= $^2/_3$ g-mol.) | 0,25 kr |
| 41 g brunsten | 0,06 |
| Bränsle | 0,05 ? |
| Summa | 0,36 kr ? |

Även om dylika kostnadsberäkningar äro synnerligen chimäriska med hänsyn till det slöseri med kemikalier, som utmärker och nog måste utmärka arbetet i en skolas kemiska institution, så måste man tydligen medge, att den här anförda metoden ger en dyrbarare syrgas än den äldre. Till dess förmån talar, att den sannolikt bättre kan fullständigt utnyttja beskickningen, varigenom kostnadsproportionen blir gynnsammare. Framför allt dock är metoden bekväm och riskfri. Om man iordningsställer ett förråd av bariumsuperoxid-brunsten-blandning, som i torrt tillstånd är obegränsat hållbar, och har en för ändamålet iordningställd apparat, blir syrgasframställningen nästa lika enkel som användningen av en vätgas- eller kolsyreapparat.

# En metod för approximativ bestämning av luftens medeltemperatur genom temperaturavläsning en gång per dygn.

Av ERIK NILSSON.

Bestämning av medeltemperatur genom timobservationer eller med hjälp av självregistrerande instrument kan av flera skäl icke komma till allmännare användning. Approximativa värden kunna visserligen erhållas genom termometeravläsningar tre gånger per dygn, men även så få observationer taga så mycket tid i anspråk, att bestämningen av medeltemperatur för praktiskt bruk — lantbruk, trädgårdsskötsel, biodling — blir försummad.

Medelst här beskrivna metod erhålles för praktiskt bruk fullt godtagbara värden genom temperaturobservation endast en gång per dygn, nämligen kl. 21, en tidpunkt vid vilken dagligt arbete vanligen icke lägger hinder i vägen för en temperaturobservation.

T. o. m. år 1913 äro medeltemperaturerna i »Meteorologiska Iakttagelser i Sverige» beräknade enligt EDLUNDS formel

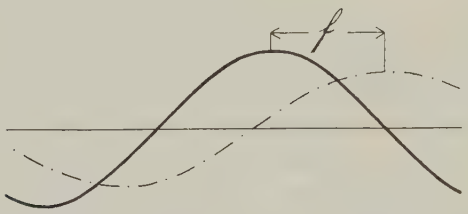
$$Te = \frac{t_8 + t_{14} + 5t_{21}}{7}, \qquad (1)$$

där $Te$ betyder medeltemperaturen, och $t_8$, $t_{14}$, $t_{21}$ betyda lufttemperaturen kl. 8, 14 och 21 resp. Fr. o. m. 1914 beräknas medeltemperaturen i Sverige med tillhjälp av EKHOLMS formler.[1] Dessa giva både bättre värden och mindre fel-

[1] Bihang till Meteorologiska Iakttagelser i Sverige, utgivna av Meteorologiska Centralanstalten, Band *56*, 2:dra serien: band *42*; Uppsala 1916.

spridning än EDLUNDS formel, men för det praktiska livets behov är denna fullt tillfyllest.

Lufttemperaturkurvan för ett dygn har i allmänhet och i stort sett ett sinusformat förlopp. Om en termometer omgives av en delvis värmeisolerande kropp och utsättes för lufttemperaturens inverkan, ger termometern en temperaturkurva, som också har sinusform. Men denna senare kurva har dels en mindre amplitud, än motsvarande lufttemperaturkurva, och dels visar den en »fasförskjutning» i förhållande till denna (fig. 1).




Figur 1. Den heldragna kurvan anger lufttemperaturens variation under ett dygn och den streckade kurvan motsvarande temperaturvariation för en delvis värmeisolerad termometer Den räta linjen är dygnets medeltemperatur och $f$ anger »fasförskjutningen».

I ekv. (1) utgöra de två första termerna i täljaren dubbla aritmetiska mediet av lufttemperaturen kl. 8 och 14. Tydligt är, att en termometer kan så värmeisoleras, att den under ett dygn med »normal» temperaturkurva visar nämnda (enkla) medium $m$ vid *två, en* eller *ingen* tidpunkt (fig. 2 *a, b* och *c*).

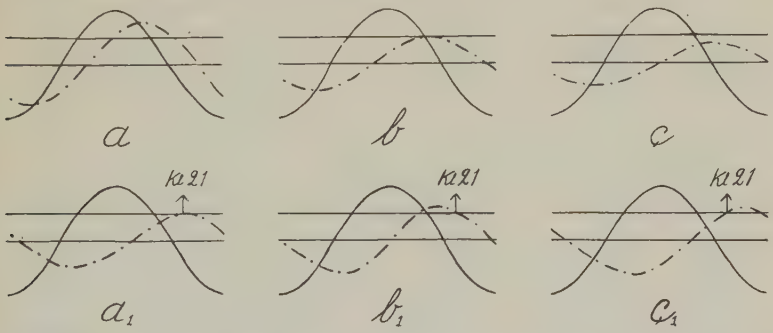
Är termometern värmeisolerad på så sätt, att den kl. 21 visar aritmetiska mediet av lufttemperaturen kl. 8 och 14, kan således ett approximativt värde, *Ti,* på dygnets medeltemperatur erhållas genom två termometerobservationer vid en tidpunkt, nämligen kl. 21, enligt ekvationen

$$Ti = \frac{2m + 5t_{21}}{7}, \qquad (2)$$

där $Ti$ betyder medeltemperaturen, $m$ den isolerade termometerns temperatur kl. 21 och $t_{21}$ lufttemperaturen kl. 21.

Den värmeisolerade termometern kan tydligen betecknas såsom en »integraltermometer».

Av $a_1$, $b_1$, $c_1$ i fig. 2 framgår, att integraltermometerns kurva kan tänkas kl. 21 respektive *tangera* medelvärdet *m* eller *skära* det på två olika sätt.




Figur 2. Den övre räta linjen betecknar aritmetiska mediet av lufttemperaturen kl. 8 och kl. 14. För övrigt såsom i fig. 1.

Följande försöksanordning har använts.

En stocktermometer insattes med kvicksilverbehållaren nära botten i en termosflaska rymmande en liter, och flaskan med termometern inpackades i korkspån i en låda av masonit (20 × 20 × 50 cm).

Den temperaturkurva, som den isolerade termometern ger, får ett förlopp, som beror, utom av lufttemperaturens variation, av isoleringen, värmeledningen, ytans beskaffenhet och värmekapaciteten. Denna senare kan varieras genom införande av aluminiumpulver i flaskan.

Efter en del försök iordningställdes ett instrument med 120 gram aluminiumpulver. Detta synes i stort sett ha fungerat enligt förhållandena i figur 2 $a_1$. Observationsorten har varit Birka (Täng, Jämtlands l.), med lat. 63°15′ N och long. 14°52′ Ö (lokal tid ≡ borgerlig tid) samt höjden 312 m ö. h.

Här kan endast i korthet redogöras för observationsresultaten under ett år (fr. o. m. 1 april 1933 t. o. m. 31 mars 1934). Antalet observationsdagar har varit 352. Under 13

Tabell 1.

| Månad | Observationsdagar | Lufttemperatur | | | Integral-termometer | Medeltemperatur | | | Avvikelse av | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Kl. 8 C° | Kl. 14 C° | Kl. 21 C° | Kl. 21 C° | *Te* enl. (1) Edlund C° | *Ti* enl. (2) C° | *Tm* enl. Ekholm C° | *Ti* från *Te* C° | *Ti* från *Tm* C° | *Te* från *Tm* C° |
| April 1933 | 30 | — 22,8 | 145,0 | — 14,2 | 71,9 | 0,46 | 0,35 | 0,87 | — 0,11 | — 0,53 | — 0,41 |
| Maj » | 31 | 230,0 | 370,1 | 177,1 | 294,9 | 6,85 | 6,80 | 6,91 | — 0,05 | — 0,11 | — 0,06 |
| Juni » | 30 | 449,0 | 590,9 | 410,7 | 533,3 | 14,73 | 14,86 | 14,58 | + 0,13 | + 0,27 | + 0,15 |
| Juli » | 31 | 488,9 | 596,1 | 439,0 | 559,7 | 15,12 | 15,27 | 15,54 | + 0,16 | — 0,26 | — 0,42 |
| Aug. » | 31 | 369,5 | 487,3 | 352,5 | 447,5 | 12,07 | 12,25 | 12,24 | + 0,18 | ± 0,00 | — 0,17 |
| Sept. » | 30 | 253,6 | 367,5 | 246,4 | 318,0 | 8,82 | 8,90 | 9,11 | + 0,07 | — 0,21 | — 0,28 |
| Okt. » | 31 | 79,1 | 155,2 | 71,0 | 111,1 | 2,72 | 2,66 | 3,00 | — 0,06 | — 0,34 | — 0,28 |
| Nov. » | 26 | — 109,1 | — 73,4 | — 110,9 | — 95,7 | — 4,05 | — 4,10 | — 3,88 | — 0,05 | — 0,22 | — 0,17 |
| Dec. » | 26 | — 53,9 | — 56,1 | — 78,1 | — 69,0 | — 2,75 | — 2,90 | — 2,46 | — 0,15 | — 0,44 | — 0,29 |
| Jan. 1934 | 30 | — 72,1 | — 30,6 | — 57,0 | — 58,7 | — 1,85 | — 1,92 | — 1,21 | — 0,07 | — 0,70 | — 0,63 |
| Febr. » | 27 | — 65,2 | — 8,0 | — 59,5 | — 45,0 | — 1,96 | — 2,05 | — 1,35 | — 0,09 | — 0,70 | — 0,61 |
| Mars » | 29 | — 142,0 | 5,6 | — 92,0 | — 44,2 | — 2,94 | — 2,70 | — 3,04 | — 0,24 | + 0,33 | + 0,10 |
| Året | 352 | 1450,6 | 2549,6 | 1285,0 | 2023,8 | 4,23 | 4,25 | 4,15 | + 0,02 | + 0,10 | + 0,08 |

dagar har temperaturen varit för låg för avläsning på skalorna.

Dygnmediet *Ti* enligt (2) har avvikit från dygnmediet *Te* enligt (1) på följande sätt.

| Avvikelse i C° | Antal dygn | % |
|---|---|---|
| 0,000—0,099 | 102 | 29,0 |
| 0,100—0,199 | 77 | 21,9 |
| 0,200—0,299 | 64 | 18,2 |
| 0,300—0,399 | 43 | 12,2 |
| 0,400—0,499 | 24 | 6,8 |
| 0,500—0,599 | 19 | 5,4 |
| 0,600—0,699 | 10 | 2,8 |
| 0,700—0,799 | 6 | 1,7 |
| 0,800—0,899 | 6 | 1,7 |
| 0,900—0,999 | 1 | 0,3 |
| 1,000— ∞ | 0 | 0,0 |
| | 352 | 100,0 |

Avvikelsen har således varit mindre än 0°,5 i 88,1 % av observationsdygnen och har icke i något fall uppgått till 1°,0.

Tabell 1 ger en översikt av de på olika sätt erhållna månadsmedeltemperaturerna samt dessas avvikelser från varandra. Tabellens årsvärden för lufttemperaturen och integraltermometern utgöra summan av resp. månadsvärden.

Metoden kan förenklas genom att lufttermometern och integraltermometern kombineras till ett instrument, varvid en »dygnmediumtermometer» erhålles, som kl. 21 direkt anger medeltemperaturen för dygnet. Om nämligen en termometers vätskebehållare delas i två med varandra kommunicerande delar, i vilka vätskekvantiteterna förhålla sig som 2 : 5 och den mindre vätskebehållaren värmeisoleras på angivet sätt, fungerar instrumentet enligt (2).

En sådan termometer, tillverkad av Rudolph Grave A/B, Stockholm, har prövats under några månader och givit fullt tillfredsställande resultat.

# Astronomisk åskådningsmateriel.

Av ALGOT JENVALL.

(Forts.).

## Apparat för att å jordglob demonstrera den dagliga rörelsen.

Den viktigaste apparaten vid all astronomiundervisning är utan tvekan jordgloben. Endast med dennas tillhjälp kunna eleverna bibringas en korrekt uppfattning om de vanligaste astronomiska begreppen, såsom meridian, ekvator, ekliptika m. fl.

Fig. 2. Apparat för att å jordglob demonstrera den dagliga rörelsen.[1]

Även för att demonstrera solens och stjärnornas dagliga rörelser är den så gott som nödvändig. Man kan i detta fall låta en liten rund planskiva, som fästes på globen, föreställa horisontalplanet för orten ifråga. Skivan bör vara märkt med tydliga väderstreck och försedd med en lodrät ståndare i mitten. Belyser man jordgloben med ljus från sidan och vrider den sakta runt dess axel, har man vid »soluppgången» en lång skugga av ståndaren mot väster. Fortsättes vridningen, får man den kortaste skuggan vid »middagstid» riktad rakt åt norr och vid »solnedgången» åter en lång skugga åt öster. Genom att montera flera dylika ståndare längs en meridian kan man erhålla en överskådlig uppfattning om solens dagliga rörelse för olika breddgrader. Även de olika årstidernas inverkan kan man demonstrera genom att vända globen, så att under »som-

[1] Figurerna i denna uppsats äro hämtade ur »Undervisningsmateriel i fysik för realskolan», P. A. Norstedt & Söners Skolmaterellavd., Stockholm 1933.

maren» nordpolen och under »vintern» sydpolen är vänd mot ljuskällan.

Har man en planskiva med rörlig ståndare och ställer in denna parallell med jordaxeln, kan man visa, att den hela tiden pekar mot samma punkt på himlavalvet, norra himmelspolen, fastän jordgloben vrides runt sin axel. Himlavalvet får härvid föreställas av tak och väggar i skolsalen. För vilken annan inställning som helst utpekar ståndaren en större eller mindre cirkel.

Sedan man på detta och naturligtvis även på andra sätt, t. ex. genom långtidsfotografering av trakten kring polstjärnan, visat, att norra himmelspolen är en fast punkt på himlavalvet, så har man god hjälp av följande apparat vid genomgången av stjärnornas skenbara rörelse.

## Apparat för demonstration av den dagliga rörelsen.

På ett horisontellt grundbräde är ställd en fast ståndare, som riktas mot norr (norra himmelspolen). Omkring ståndaren sitter en vridbar hylsa och vid denna åter en rörlig visare, som, då hylsan vrides runt, utpekar solens eller stjärnornas dagliga rörelse. Då den fasta ståndarens lutning är omkring 60°, åskådliggör den förhållandena för en latitud av detta belopp. Man kan lätt ändra vinkeln mellan visaren och den fasta ståndaren och har därigenom möjlighet att visa bågen för den dagliga rörelsen för stjärnor med olika polavstånd, deras höjd över horisonten vid meridianpassage, väderstrecken för deras upp- och nedgång, vilka stjärnor, som äro cirkumpolara m. m. Apparaten är även användbar till att demonstrera parallaktisk uppställning av en astronomisk tub.

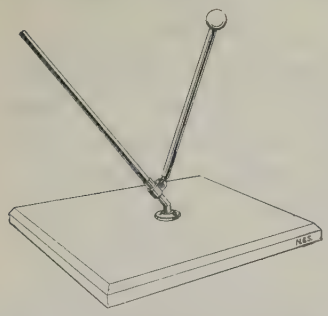


Fig. 3. Apparat för demonstration av den dagliga rörelsen.

## Miniatyrjordglob med månbana.

För att åskådliggöra sol- och månförmörkelser har i regel använts dels planscher och dels telluriet. Det senare ger i allmänhet en ganska skev bild av dessa fenomen på grund av de fullständigt absurda dimensionsförhållanden, som förefinnas mellan månbanans och »jordens» storlek på denna apparat.

Med större fördel använder man den miniatyrjordglob, som fig. 4 utvisar. Runt omkring densamma är fästad en ring av metalltråd, föreställande månbanan, med en flyttbar »måne». Apparaten flyttas runt omkring en glödlampa (solen), under iakttagande av att månbanan — liksom jordaxeln — intar samma läge under rörelsen, d. v. s. att dess högsta punkt hela tiden är riktad åt samma håll. Avståndet mellan lampan och apparaten bör vara omkring 2 m. Dessutom bör man se till, att lampans och apparatens fotställningar äro lika höga. Apparaten åskådliggör dels själva förmörkelsefenomenen, dels uppkomsten av de två förmörkelseperioderna pr år med ett halvårs mellanrum.

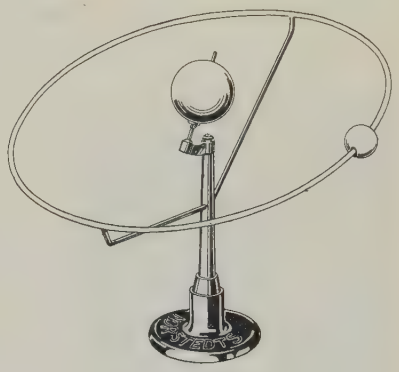


Fig. 4. Miniatyrjordglob med månbana.

Genom att efter ett varv (ett år) vrida månbanan så, att dess högsta punkt förskjutes $^1/_{18}$ varv i förhållande till dess förra fasta läge, under det man likväl låter jordaxeln ha samma läge som förut, förklaras lätt varför förmörkelserna nästa år inträffar på ett något tidigare datum.

Ställes en vit skärm bakom apparaten, så att skuggan av denna faller på skärmen, har man en vacker och överskådlig bild av jordens och månens kärnskugga resp. halvskugga.

---

# Om termisk utvidgning.

Av RAGNAR LUNDBLAD.

Den elementära behandlingen av fasta och flytande kroppars utvidgning grundar sig på utvidgningsformlerna

$$\Delta L = aL_0t; \quad \Delta A = bA_0t; \quad \Delta V = cV_0t, \tag{1}$$

där $a$, $b$ och $c$ betyda koefficienterna för längd-, yt- och volymsutvidgning.

Formlerna äro blott approximativa, koefficienterna $a$, $b$ och $c$ äro i verkligheten inga konstanter. Av det nernstska värmeteoremet följer, att de äro noll vid absoluta nollpunkten, och starka teoretiska skäl låta oss förmoda, att volymsutvidgningskoefficienten till en början växer approximativt proportionellt med kuben på absoluta temperaturen. Vid högre temperatur går stigningen långsammare. Ett par mätningsserier återgivas i nedanstående tabell.

| Diamant enl. Röntgen | | Aluminium enl. C. L. Lindemann | |
|---|---|---|---|
| Temp.-intervall (abs. temp.) | $a \cdot 10^6$ | Temp.-intervall (abs. temp.) | $a \cdot 10^6$ |
| 84,8 —194,1 | 0,16 | 20—81 | 2,8 |
| 194,1 —273,15 | 0,61 | 81—90 | 9,1 |
| 273,15—296,2 | 0,97 | 81—293 | 16,7 |
| 296,2 —328,0 | 1,17 | 195—273 | 22,2 |
| 328,1 —351,1 | 1,37 | 273—373 | 23,7 |

Vid vanlig temperatur synes längdutvidgningskoefficienten för de flesta metaller växa med 1 % för en temperaturhöjning av 5 till 15°.

Ännu sämre lämpa sig de anförda formlerna för framställning av vätskornas utvidgning. Experimentatorernas resultat måste vanligen framställas i form av dignitetsserier med flera termer. Efter Chemikerkalender för år 1933 må några exempel anföras. Volymsutvidgningskoefficienten har satts $= c_0 + c_1 t + c_2 t^2$.

| Ämne | $c_0 = +\ 0{,}00$ | $c_1 = +\ 0{,}0000$ | $c_2 = +\ 0{,}0000000$ | $\frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dt}$ |
|---|---|---|---|---|
| Metylalkohol | 11856 | 03130 | 2733 | $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ |
| Myrsyra | 09927 | 01250 | 1790 | $1{,}9 \cdot 10^{-3}$ |
| Ättiksyre-etylester | 12738 | 04383 | 3539 | $4{,}2 \cdot 10^{-3}$ |
| Aldehyd | 15464 | 13949 | | $7{,}6 \cdot 10^{-3}$ |
| Kloroform | 11072 | 09329 | — 5230 | $5{,}7 \cdot 10^{-3}$ |
| Brom | 10382 | 03423 | 1634 | $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ |
| Anilin | 08171 | 01838 | 0188 | $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ |

Sista kolumnen visar utvidgningskoefficientens temperaturberoende vid 20° C. Ett fåtal grader är tillräckligt för en stigning på en procent.

Det sagda gäller naturligtvis blott om vätskornas typiska förhållande. Ett undantag är väl bekant — metallen kvicksilver. Dess utvidgningskoefficient vid 100° är blott 0,9% större än vid 0°. Vidare kan det ibland inträffa, att utvidgningskoefficienten går genom ett flackt minimum, och utvidgningsformeln kan då med blott några procents fel tillämpas inom ett temperaturintervall om flera tiotal av grader. Enligt Seitz [1] är detta fallet för metyl- och etylalkohol vid temperaturer under 0° C. Men mer än undantagsfall är detta dock icke. Skolans undervisning måste taga sikte på det typiska.

De vanliga utvidgningsformlerna äro helt visst oumbärliga. De sammanfatta värdefull empirisk kunskap. Deras brister gör dem på samma gång till naturliga utgångspunkter för den undervisning, som vill skilja mellan stort

[1] W. Seitz, H. Alterthum u. G. Lechner, Ann. d. Phys., Bd 49, p. 91, 1916.

och smått, mellan nyttiga approximationer och exakt vetande.

Hur långt man i detta avseende vill gå, är väl till en del en lynnesfråga. Man kan tänka sig ett mera begränsat program och ett vidsträcktare. Det förra finnes realiserat i Moll-Rudbergs bekanta lärobok. Formlerna behandlas i det hela som om de vore exakta. På ett par ställen göras visserligen reservationer men på ett sådant sätt, att lärjungarnas formeltro icke löper fara att rubbas. När det i läroboken heter, att »utvidgningen, såsom noggranna försök visa, i allmänhet är mycket nära densamma för varje grads temperaturförhöjning», så är nog detta närmast ägnat att befästa lärjungarnas tro på formlernas exakthet. Och när det i § 11 står: »För vätskor, som ofta utvidga sig ganska oregelbundet, är volymsutvidgningskoefficienten i allmänhet betydligt större än för de fasta kropparna», får nog läsaren närmast den uppfattningen, att vätskor med »oregelbunden» utvidgning äro undantag. När sedan de vanliga approximationerna behandlas, motiveras de endast med att vissa termer äro ytterst små. Mången bibringas nog den uppfattningen att approximationerna äro tillåtna för de fasta kropparna men ej för vätskorna med deras mycket större utvidgningskoefficient.

Vissa pedagogiska skäl kunna måhända anföras till förmån för en sådan begränsning, och den är onekligen skickligt genomförd i den citerade läroboken. Men för min del tror jag, att man bör gå längre, göra kritiken av formlerna mera effektiv, diskutera approximationerna icke blott med hänsyn till termernas storlek utan också med hänsyn till formlernas eget värde.

Redan från de fasta kropparnas utvidgning kunna exempel hämtas. Vi betrakta följande enkla uppgift[1]: *En stav av koppar är vid 0° 9 dm. Till vilken temperatur skall den uppvärmas, för att förlängningen skall utgöra 2 mm?*

[1] Moll-Rudberg, Lärobok i fysik, del II, 10 uppl., sid. 17.

Koppars längdutvidningskoefficient är vid 0° $16{,}7 \cdot 10^{-6}$ och vid 130° $17{,}7 \cdot 10^{-6}$. Mellan dessa temperaturer varierar den enligt formeln [1]

$$a = 16{,}7 \cdot 10^{-6} + 8{,}06 \cdot 10^{-9} t. \qquad (2)$$

Löser man uppgiften med hjälp av (1) och med användande av den vid 0° gällande längdutvidgningskoefficienten, erhålles $t = 133°$. Begagnas den vid 130° gällande koefficienten, erhålles $t = 126°$. Användes formeln (2), erhålles slutligen $t = 129°$.

Svaret bör tydligen vara »c:a 130°». Avrundningen kan inte motiveras med att vissa termer äro ytterst små. Det som tvingar oss till att avrunda är formlernas egen opålitlighet.

Vore det blott fråga om de fasta kropparna, kunde man dock kanske hänföra hela meningsskiljaktigheten till de differenser, som äro »små av andra ordningen». Men samma frågeställning återkommer vid behandlingen av vätskornas utvidgning och anmärkningarna få där helt annan tyngd. Denna sida av saken har nyligen aktualiserats genom ett studentproblem, där en vätskas utvidgningskoefficient skall beräknas ur mätningar, åtskilda genom det hiskliga temperaturintervallet 178°. Problemet är av följande lydelse: *En vågbalans, som är vridbar kring en vågrät och mot balansens längdriktning vinkelrät egg, har olika tunga armar. På den ena armen hänger en kula av kvartsglas i en mycket fin, böjlig tråd, som slutar i en ögla. Denna är trädd över vågarmen och kan förskjutas längs densamma. Vågbalansen är horisontell och i jämvikt, när avståndet mellan eggen och upphängningstråden är 15,9 cm. Då kulan efter vartannat nedsänkes i två kärl, innehållande samma vätska av temperaturerna — 78° C resp. + 100° C, måste man, för att vågbalansen skall inställa sig horisontellt, förskjuta öglan, så att avståndet mellan eggen och tråden blir*

[1] Landolt-Börnstein-Roth, 4 uppl., p. 341, 1912.

*28,6 resp. 25,1 cm. Sök vätskans utvidgningskoefficient. Kulans utvidgning ävensom upphängningstrådens och öglans vikt kunna vid beräkningen lämnas utan avseende.*

Om vätskans täthet vid — 78° C är $\gamma_{-78}$ och vid + 100° C $\gamma_{100}$ g/cm$^3$, erhålles ur textens data $\gamma_{-78} : \gamma_{100} = 1{,}213$, och uppgiften är att därav beräkna utvidgningskoefficienten $c$. Antager man, att formlerna (1) äro exakta, sker detta medelst formeln för tätheten

$$\gamma_t = \frac{\gamma_0}{1 + ct}, \tag{3}$$

där $\gamma_0$ är tätheten vid 0° C. Förfarandet leder till svaret $c = 1{,}09 \cdot 10^{-3}$. Det är denna lösning, som framsuggereras av det mollska behandlingssättet. Om verkligen vätskorna exakt lydde utgångsekvationen (1), vore detta naturligtvis också det enda rätta svaret. Men om textens siffror åsyfta ett verkligt experiment med en verklig vätska, torde det på sin höjd kunna presenteras som ett medelvärde för utvidgningskoefficienten, för resten rätt godtyckligt bildat.

Redan de första noggranna täthetsbestämningarna måste emellertid ha avslöjat ohållbarheten av formeln (3). Mendelejeff [1] fann, att vätskorna mera villigt fogade sig efter formeln

$$\gamma_t = \gamma_0(1 - Ct), \tag{4}$$

där konstanten $C$ av honom kallades utvidgningsmodylen. För små temperaturintervall överensstämmer den tydligen med utvidgningskoefficienten. För större intervall kan den betraktas som ett medelvärde för utvidgningskoefficienten. Behandlar man det citerade problemet på detta sätt fås $C = 1{,}07 \cdot 10^{-3}$.

Under en viss period av fysikens utveckling synes man ha velat tillmäta Mendelejeffs medelvärde särskild vikt. Walden [2] har t. ex. bestämt utvidgningsmodylen för ett

[1] D. Mendelejeff, Journ. russ. phys. chem. Ges., Vol. 16, p. 1, 1884.
[2] P. Walden, Zeitschr. f. phys. Ch., Bd 65, p. 129, 1909.

stort antal vätskor och undersökt dess samband med kapillaritetskonstanterna. Konowalow har härlett formeln (4) ur van der Waals lag, Luther har givit en termodynamisk härledning o. s. v.[1] Man kan dock knappast säga, att Mendelejeffs förfarande slagit igenom. I verkligheten förete ju många vätskor avsevärda avvikelser även från formeln (4).

Enligt ett tredje förfarande sätter man

$$V_{100} = V_{-78}\,(1 + 178\,c),$$

eller, vilket går ut på samma sak

$$\frac{\gamma_{-78}}{\gamma_{100}} = 1 + 178c.$$

Därigenom erhålles ett nytt medelvärde $c = 1{,}_{20} \cdot 10^{-3}$. Om en vätska vid uppvärmning från $t$ till $t'$ utvidgar sig från volymen $v$ till volymen $v'$, leder denna metod till den allmänna formeln

$$c = \frac{1}{v} \cdot \frac{v' - v}{t' - t}.$$

På detta sätt definieras utvidgningskoefficientens medelvärde t. ex. i Kohlrauschs bekanta Lehrbuch der praktischen Physik.[2] Men det ligger i öppen dag, att denna medelvärdesbildning är godtycklig som de föregående.

Ett fjärde svar erhålles, om man sätter

$$\gamma_{-78} = \frac{\gamma_{100}}{1 - 178c}.$$

Därav följer $c = 0{,}_{987} \cdot 10^{-3}$. Det är ingen svårighet att konstruera godtyckliga medeltal av en variabel, om vars förlopp ingenting är med säkerhet bekant.

Jag vet inte, vem som författat det citerade problemet och vad författaren åsyftat med detsamma. Åtskilligt talar

[1] Konowalow, Journ. russ. phys. chem. Ges., Vol. 18, p. 398, 1886; Luther, Zeitschr. f. phys. Ch., Bd 12, p. 524, 1893. Citat enl. Walden.

[2] L. c. 15 uppl., p. 160, 1927.

för att den tredje lösningen bör givas företräde. Den är visserligen i och för sig inte riktigare än de andra, men den torde bäst ansluta sig till gängse praxis. För min del nöjer jag mig med att konstatera, att utvidgningskoefficienten dock uppenbarligen var av storleksordningen $1 \cdot 10^{-3}$. Mer tror jag inte kan utpressas ur textens data.

Ett annat spörsmål intresserar mig mera. Kan man vänta, att problemet skall bliva undervisningen till skada eller till gagn? Avgörandet ligger i gymnasielärarnas händer. Om problemet begagnas till att besinningslöst pressa decimaler ur lärobokens grovt approximativa formler, kan det väl endast bliva undervisningen till skada. Men om det tages till utgångspunkt för en kritik av formlerna, tror jag, att författaren genom valet av denna uppgift gjort undervisningen en tjänst.

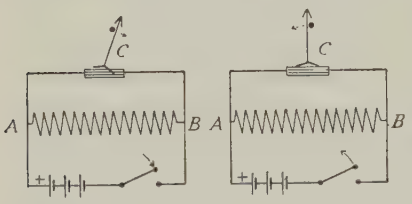
---

## Självinduktion.

I Moll-Rudbergs elektricitetslära äro på sid. 82 (11:e uppl. 1934) omnämnda några experiment för att demonstrera självinduktionens verkningar. Försöken åsyfta påvisandet av de vid strömslutning, resp. strömavbrott inducerade elektromotoriska krafterna genom iakttagande antingen av strömstötarna i en parallellt till induktionsspolen inkopplad galvanometer eller glödlampa eller av den genom spolen gående strömmens »krypning» upp till det stationära värdet eller ned till noll. De i boken lämnade föreskrifterna för försökens utförande äro emellertid relativt knapphändiga, och den i fig. 124 skisserade anordningen synes på en punkt lida av en ofullständighet, som *kan* leda till ett misslyckande. Nedanstående rader ha till syfte att söka undanrödja denna anledning till eventuella missöden ävensom att i övrigt lämna några smärre upplysningar, som möjligen kunna vara till nytta.

Att märka är till att börja med, att den använda spolen förutom *stor* självinduktion (bäst järnkärna med sluten krets) även bör ha ett *litet* ohmskt motstånd. I regel torde större elektromagneter (såsom den av Lemoine konstruerade eller motsvarande typer) begagnas. Innehåller magneten tvenne lika spolar, kunna dessa — självfallet under aktgivande av polariteten — parallellkopplas.

Gäller det nu att medelst galvanometer eller lampa visa den vid strömslutning uppkomna stöten, måste — vilket icke framgår av fig. 124[1] — antingen strömkällan själv eller ledningen från denna innehålla ett lagom avpassat motstånd. Utan sådant motstånd kan spänningen mellan punkterna A och B aldrig överstiga den stationära; finnes däremot ett dylikt, blir i slutningsögonblicket spänningsförlusten i detsamma tack vare den försvagning av strömmen, som den inducerade motelektromotoriska kraften åstadkommer, så liten, att spänningen mellan A och B ett ögonblick överskrider den stationära tillräckligt för att alstra den första strömstöten. Vid strömavbrott upphör självfallet motståndets funktion. Galvanometereffekten brukar ej erbjuda några svårigheter att visa (en s. k. vertikalgalvanometer gör goda tjänster), däremot kan det visa sig besvärligt att erhålla en lämplig lampa. Vackrast är ju, om det hela avpassas så att lampan endast lyser till vid själva strömstötarna men f. ö. är mörk. Förf. brukar använda 3 à 4 seriekopplade 3,5-voltslampor, avsedda för ficklampor. Dessa reagera tack vare lystrådens finhet mycket känsligt för strömvariationer. Till fördel är även att de ha ett relativt stort motstånd (c:a 10 Ω.). Den stationära strömstyrkan i spolen bör göras så stor, som förhållandena medgiva.[2]




Då krypningen skall demonstreras, inkopplas i serie med spolen men innanför A—B (fig. 124) en ampèremeter. Läroboken rekommenderar för detta försök, att galvanometern (glödlampan) »ersättes med ett litet motstånd». Ordet »litet» bör särskilt betonas. Ett skjutmotstånd, reglerat ned till något ohm, är lämpligt. Det förut nämnda förkopplingsmotståndet måste här urkopplas, då det är av största vikt, att alla motstånd äro små. Ampèremetern bör vara aperiodisk men icke trög. Med Lemoines elektromagnet har förf. gjort den iakttagelsen, att krypningen bäst framträder för stationära strömstyrkor under 1 amp.

Till sist må framhållas vikten av att vid försöken använda strömbrytare fungera väl.

[1] Svenska Bokförlaget har välvilligt ställt figuren till tidskriftens förfogande.

[2] Om glimlampan som indikator för stötarna se ex.-vis WETTERBLAD, Kapacitet och självindikation, denna tidskrift årg. *11*, sid. 148.

*Torsten Wetterblad.*

# Bokanmälningar.

Mary Elvira Weeks, *The Discovery of the Elements*, Mack Printing Co, Easton, Pennsylvania, 363 sid., klotband 2 dollars.

Detta arbete, vars förf. är professor i kemi vid staten Kansas universitet, är ett synnerligen förnämligt tillskott till den historiskt-naturvetenskapliga litteraturen. Det finns ju mycket skrivet rörande kemiens historia, dels i verk sådana som Dannemann »Die Naturwissenschaften», dels i mera speciella arbeten, såsom Bugges »Das Buch der grossen Chemiker», för att nu endast nämna ett par av de mera lättlästa representanterna för genren. Som framgår av titeln på nu ifrågavarande arbete har författarinnan här satt som sitt mål att ge en översikt av den historiska utvecklingen inom en alldeles särskild gren av kemisk forskning, nämligen den, som sysslar med upptäckten och isoleringen av nya grundämnen.[1]

Utforskandet av kemiens allmänna principer beröres endast i den mån, den haft direkt inflytande på de problem, som utgöra bokens huvudtema. Så omnämnas de grundläggande upptäckterna inom elektrokemiens och spektralanalysens områden liksom utvecklingen av de tankar, vilka förde till uppställandet av grundämnenas periodiska system. Det övervägande utrymmet ägnas emellertid direkt åt den gren av kemisk forskning, som bokens titel anger.

Efter ett par inledande kapitel om de redan i den klassiska forntiden kända samt om de av alkemisterna upptäckta grundämnena övergår författarinnan till att i aderton kapitel framställa de övriga elementens upptäcktshistoria. Härvid sammanför hon i stort sett från kemisk synpunkt besläktade grundämnen. Sålunda behandlar ett kapitel kalium, natrium och litium, ett annat halogenerna o. s. v. Denna princip är dock ej fullt genomförd, utan i vissa fall har indelningen skett efter de metoder, som använts för

[1] Det förtjänar i detta sammanhang påpekas, att J. F. Nordwalls, väl huvudsakligen för folkskoleseminarierna avsedda »Lärobok i kemi» innehåller en tabell upptagande grundämnenas upptäcktsår och upptäckare.

framställningen. Så behandlar ett kapitel »Några upptäckter med spektroskopets hjälp», ett annat »Några av Mendelejeff förutsagda element» o. s. v.

Boken innehåller en mängd fakta, om vilka kunskap hittills kunnat vinnas endast genom ett tidsödande letande i en mängd olika, delvis ganska svårtillgängliga arbeten. De synnerligen rikhaltiga litteraturhänvisningar, som ledsaga varje kapitel, visa 'hän på ett imponerande arbete av författarinnan. Hennes noggrannhet även beträffande detaljer framgår bl. a. av de svenska namnens — såväl person- som ortnamnens — fullkomligt riktiga stavning. Ej ens de för en engelsktalande fullkomligt obegripliga prickarna över ä och ö saknas.

Bokens stil är synnerligen medryckande. Författarinnan lyckas på många ställen få fram den spänning, som måste ha legat i den fascinerande jakten efter nya grundämnen och hon framhäver på ett lyckligt sätt den hängivenhet och offervilja, som legat bakom de uppnådda resultaten. Typiska i detta avseende äro kapitlen om aluminium och om fluor.

Av synnerligt intresse är den sammanhängande framställningen av de mödosamma forskningar, som fört till upptäckten av de sällsynta jordarternas metaller liksom kapitlet om isoleringen av ädelgaserna. Sista kapitlet behandlar de senast upptäckta grundämnena, och här finner man bl. a. den ganska förbluffande upplysningen, att hafnium förekommer rikligare i naturen än både guld och silver.

För den lärare, som önskar uppliva sin kemiundervisning med en del smådrag om den kemiska forskningens pioniärer, utgör boken en guldgruva. De stora vetenskapsmännens rent mänskliga drag framställas i blixtbelysning genom korta citat av yttranden av dem själva eller deras samtida. Hur karakteristisk är icke Pierre Curies skrivelse, när han erhållit hederslegionen: »Jag ber Er tacka ministern och säga honom, att jag ej alls behövde någon dekoration, men att jag i allra högsta grad behöver ett laboratorium». Eller Bunsens vemodiga ord, när en vän gjorde någon anspelning på de många utmärkelser, han fått mottaga: »Solche Dinge hatten nur Wert für mich, weil sie meine Mutter erfreuten; sie ist nun tot».

Det är med en känsla av stolthet man konstaterar, vilken proportionsvis oerhörd insats vårt lilla och fattiga folk gjort i sökandet efter nya grundämnen. Av de 92 elementen ha ej mindre än 20 upptäckts av svenskar, däribland några av de allra viktigaste, såsom syre, kisel och klor. Författarinnan har tydligen öst rikligt ur Söderbaums levnadsteckning över Berzelius liksom ur densam-

mes »Jac. Berzelius bref». Överhuvudtaget har hennes intresse för de svenska forskarna varit stort — helt naturligt för resten med tanke på deras stora insatser på det område, boken behandlar. Andra länders insatser ha därför ej kommit i bakgrunden. Behandlingen torde vara likformigt fördelad på alla länders forskare efter deras insatser, men man blir faktiskt angenämt överraskad, när man i utländska framställningar finner en rättmätig plats given även åt vårt lilla lands representanter.

Det synnerligen rikhaltiga och i stort sett förstklassiga bildmaterialet förtjänar ett särskilt omnämnande. Boken innehåller ej mindre än sju olika porträtt av Berzelius jämte en reproduktion av ett av hans brev och tre bilder av hans laboratorium, en bild av hans födelsehem och en av hans grav. Detta torde säga en del om författarinnans tanke om Berzelius betydelse, i synnerhet om man beaktar, att hon av exempelvis Davy endast medtagit tre porträtt. Av Scheele finnas tre bilder, däribland bägge statyerna, och dessutom finnas — utom porträtt av samtliga mera bemärkta svenska forskare på det område boken behandlar — bilder av Kungl. biblioteket i Stockholm, av Karolinska institutet, Vetenskapsakademien, Falu gruva, Taberg, Riddarhyttan m. fl. svenska byggnader och orter, som omtalas i texten.

Bland intressanta bilder av andra länders forskare och forskningsplatser vill jag endast nämna det praktfulla porträttet av »Wöhler in later life», gruppbilden av Rutherford, Hahn, Lise Meitner m. fl. av de främsta forskarna på de radioaktiva grundämnenas område — ett slående uttryck för vetenskapens internationalitet — och bilden av det laboratorium, där makarna Curie framställde sina första radiumpreparat. Enligt ett i boken anfört citat efter Ostwald vid hans besök i denna i kemiens historia så betydelsefulla lokal, liknade den »en korsning mellan ett stall och en potatiskällare». Här liksom på många andra ställen i boken får man ett starkt intryck av att det ej är de materiella resurserna utan det mänskliga snillet och det tåliga arbetet, som spela den dominerande rollen även när det gäller experimentell forskning. En annan intressant bild är den, som visar Moissan i färd med att framställa fluor. De allra flesta bilderna äro utmärkta, endast ett fåtal, t. ex. en vy över Kalmar, äro mindre goda.

Det sagda torde vara nog för att ge en föreställning om vad Mary Weeks bok har att bjuda såväl kemilärare som sådana elever, vilka utföra enskilt arbete i kemi.

*J. Lundberg.*

R. F. Hunter, The Electronic Theory of Chemistry. E. Arnold & Co. London 1934. 125 sid., pris bunden kr. 8: 50.

Arbetets syfte är att giva de kemister, som vuxit upp under den klassiska kemiens aera, en framställning av den moderna elektronteorien för kemisk valens. Härom säger förf. i sitt förord, att »de undersökningar, som resulterat i en fullständig omvälvning inom kemien, t. ex. de som gälla elektronens vågmekaniska teori, tyvärr äro alldeles obegripliga för den vanliga kemisten. Å andra sidan är det för oss, som äro av en årgång tidigare än 1922, mest betydelsefulla att äga så mycken kännedom om elektronteorien, att den kan förhjälpa oss till uppklarandet av kemiska problem. Det är då en tröst att finna, att trots de nya kvantmekaniska teorierna elektronen och atomen alltjämt äro diskreta enheter i vår vetenskap, och att resultaten av den vågmekaniska analysen kunna översättas till de för oss mera bekanta elektronmodeller, varpå detta arbetes material baseras.» De viktigaste kapitelrubrikerna äro: Den grundläggande fysikaliska teorien för elektronen och atomen; Elektrovalens och kovalens; Den koordinerade bindningen; Kovalenser högre än fyra; Den elektrovalenta, kovalenta och koordinerat-kovalenta bindningens fysikaliska egenskaper; Parakoren och dess tillämpningar; Teorien för aromatisk substitution; Teorien för tautomeri; Trifenylmetyl och dess derivat. Beträffande »parakoren» må tilläggas, att detta är benämningen på en ny fysikalisk konstant, bestämd av en vätskas molekylvikt, täthet och ytspänning. Denna konstant är av additiv natur och kan för en given förening beräknas som en summa av termer, som dels tillkomma de ingående atomerna, dels tillkomma de olika arter av bindningar, som förekomma i molekylen. Dess bestämning har därför visat sig vara ett av de värdefullaste medlen att avgöra arten av de bindningar, som sammanhålla atomerna.

Författarens ambition att lämna oss äldre kemister en för vår fattningsförmåga lämpad framställning av de nyaste åskådningarna inom valensläran har utan tvekan blivit tillfredsställd. Arbetet är välskrivet, lättläst och genom det ljus det kastar över den empiriska kemiens fakta synnerligen intresseväckande. Som exempel må här endast anföras den förklaring, som gives av de svaga elektrolyternas ringa dissociation. Typen för denna ämnesklass, ättiksyran, existerar i vattenlösning i två former, en kovalent och en elektrovalent, i jämvikt med varandra och med de joner, som bildas av den elektrovalenta formen:

$$CH_3COOH \text{ (kovalent)} \rightleftarrows CH_3COOH \text{ (elektrovalent)} \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows CH_3COO^{-1} + H^{+1}.$$

Den första jämvikten är i utspädd lösning till 99,5 % förskjuten åt vänster, varför ättiksyrans ledningsförmåga endast är ett mått på de återstående 0,5 procentens dissociation.

Till varje kapitel är fogad en förteckning över viktigare orginallitteratur.

*G. Starck.*

*Alte Probleme — neue Lösungen in den exakten Wissenschaften.* Franz Deuticke, Leipzig o. Wien, 1934, 122 sid., RM. 3:60.

Under denna titel har utgivits ett litet trevligt häfte, innehållande fem i Wien hållna föredrag över valda aktuella problem. En föregående, liknande samling har utförligt refererats i denna tidskrifts förra årg. sid. 227—229. Det gynnsamma totalomdöme, som där fällts, kan obetingat även få gälla föreliggande samling.

Prof. K. Menger i Wien inleder föredragsserien med en innehållsrik orientering över vissa grenar av modern matematik under titeln: »Ist die Quadratur des Kreises lösbar?» Läsaren får en inblick i de frågor och metoder, som sammanhöra med detta klassiska problem, stiftar bekantskap med begreppet transcendent tal, Liouvilles sats, och ledes slutligen in i förgården till den säregna byggnad, som grundlades av Cantor och bär namnet: mängdlära. Det bjudes även — åtminstone till beskådning — några utvalda frukter av årets skörd, plockade av Gelfond och Schneider inom nämnda byggnads svårtillgängliga domäner. — Hans Thirring diskuterar utförbarheten av det lockande problemet att flyga i världsrymden. Han anlägger härvid några nya synpunkter, som veterligen icke förekommit i tidigare diskussioner, bl. a. frågan om vilken temp. en kropp kommer att antaga ute i rymden. På jordens avstånd beräknas denna temp. bli omkr. + 4° C, om inga åtgärder vidtagas för att kontrollera solstrålningens inverkan. Som resultat av undersökningen uttalas den helt visst riktiga förmodan, att det torde komma att dröja länge än, innan en egentlig trafik — ens till de närmaste planeterna — etableras. — H. Mark refererar de alkemistiska problemen och deras moderna lösningar i form av kärnreaktioner och syntes av komplicerade molekyler. — F. Scheminzky diskuterar uralstringens problem och de med livsföreteelserna analoga fenomenen, som låta sig experimentellt framkallas hos livlös materia. — Slutligen meddelas en posthum uppsats av H. Hahn om oändlighetsbegreppet inom matematiken, varmed läsaren åter får blicka in i mängdläran.

*J. Tandberg.*

R. Tambs Lyche, *Begynnelsegrunnene av differensial- og integralregningen.* Andra uppl. II. Aschehoug & Co, Oslo 1934, 63 sid.

I det norska realgymnasiets stadga om kursplaner i matematik finns en passus, som medger, att någon del av den påbjudna kursen kan utbytas mot en kort kurs i differentialkalkyl. Författaren har skrivit sin bok med avsikt, att den skulle utgöra en lämplig lärobok för detta ändamål och stimulera intresset, så att bestämmelsen i fråga ej blir blott en paragraf. Sedd ur denna synpunkt fyller boken väl sin uppgift. Med grundlighet och skärpa definierar och utvecklar författaren de grundläggande begreppen i infinitesimalkalkylen: funktion, kontinuitet, derivata, differential, bestämd och obestämd integral. Det märks, att det är en van pedagog, som för pennan. Kanske skulle man önska, att i härledningen av derivatan för $x^n$ binomialteoremet icke komme till användning; den härledes enkelt utan detta, och då har man den fördelen att kunna använda derivatan av $x^n$ för härledning av binomialteoremet. Antalet exempel är väl sparsamt. Författaren hänvisar till examensuppgifterna.

För svenska förhållanden har boken ej fullt samma intresse. Differentialkalkylen är fast inbyggd i realgymnasiets kurs, om än åtskilligt beskuren enligt senaste stadgan. Det finns också läroböcker, som fylla högt ställda anspråk. Emellertid är det ett trängande behov, att sådan matematisk litteratur framkommer, som kan sättas i elevernas händer vid det enskilda arbetet. Den här nämnda boken synes mig, ehuruväl den har många förtjänster, dock icke användbar härtill, då det, som bjudes utöver svenska skolkurser i differentialräkning, är av alltför ringa omfattning.

*Arvid Uhler.*

Bror Asplind, *Våra grannar i världsrymden.* I serien Vår underbara värld, utgiven av Bokförlaget Natur och Kultur. Stockholm 1934, 153 sid., kr. 2:40.

Med all rätt talar man om »populariseringens svåra konst». Grundliga kunskaper, intresse för saken och god pedagogisk blick äro oundgängliga förutsättningar för att lyckas vid utövandet av denna konst. Men, som en framstående pedagog ofta betonat, förmågan att meddela undervisning i någon form är liksom förmågan att utöva andra konster mer eller mindre medfödd. Den som av naturen icke är en konstnär når sällan långt, även om goda förutsättningar för övrigt förefinnas. Då man läser lektor Asplinds lilla

bok om våra grannar i världsrymden får man ett starkt intryck av, att han i högre grad än de flesta av naturen gynnats med förmågan att popularisera. Inom den knappa ramen av 150 sidor förmår han att på ett synnerligen enkelt och lättfattligt och på samma gång medryckande sätt göra läsaren förtrogen med stjärnvärlden, med de fundamentalaste lagarna och de viktigaste hjälpmedlen för den astronomiska forskningen och låter läsaren dessutom få en inblick i några av den moderna astronomiens viktigaste resultat. Allt detta gör författaren utan användande av matematiska formler eller svårbegripliga vetenskapliga termer. Som en första orientering är boken därför synnerligen värdefull, och säkert kommer den att locka många till fördjupade studier i ämnet. Författaren har en berömvärd förmåga att genom roande och från det dagliga livet hämtade bilder klargöra naturvetenskapliga sanningar. Då han vill åskådliggöra, i huru hög grad tyngdkraften på olika himlakroppar är beroende av kropparnas massa, lånar han bilder från sportlivet. »Världsrekordet i kulstötning skulle på Mars med en vanlig kula bli bortåt femtio meter, och en världsmästare i spjutkastning skulle där med lätthet singla i väg spjutet omkring tvåhundra meter i ett enda kast». Som en särskild förtjänst hos författaren vill jag framhålla hans behandling av de historiska momenten. De astronomiska upptäckternas historia och striderna omkring världsbilden äro så betydelsefulla för hela den kulturella utvecklingen, att de aldrig böra förbigås i något populärt astronomiskt arbete. I stället för att, som vanligen är brukligt, den historiska utvecklingen huvudsakligen behandlas i ett sammanhang, lämnar författaren de historiska notiserna i samband med de speciella frågor, med vilka de stå i samband. Framställningen blir härigenom för den oinvigde lättare begriplig och mer intresseväckande. Som en förtjänst hos arbetet torde även kunna framhållas, att författaren nöjer sig med en mer allmän beskrivning av de viktigaste instrumenten utan att ingå på de närmare detaljerna, vilket i böcker av detta slag är till föga nytta, då den publik, till vilken sådana böcker rikta sig, sällan har nödiga förutsättningar för att förstå dessa detaljer. Måhända är författaren alltför sangvinisk, då han uppmanar läsaren att själv utföra det Foucaultska pendelförsöket, som i sin klassiska form visserligen principiellt sett är enkelt, men vars praktiska utförande dock möter avsevärda svårigheter. Säkerligen äro de lärare lätt räknade, som verkligen utfört detta försök, som dock på 5 à 10 minuter kan visas i ett vanligt klassrum med tillhjälp av en ganska enkel pendel (Z. f. ph. u. ch. Unterr. bd. 34 s. 158 (1921)).

Författarens stil är enkel och klar, bildmaterialet synnerligen

rikhaltigt och gott. Givetvis kan ett och annat insmyga sig i ett arbete av detta slag, som kan giva anledning till anmärkning, t. ex. då Galilei säges hava gjort sina upptäckter med den astronomiska tuben. Detta namn begagnas som bekant för ett annat instrument än den Galileiska kikaren, som vanligen kallas teaterkikaren. Det kan ju t. ex. också ifrågasättas, huruvida icke läsaren får något felaktig föreställning om planeternas förmåga att reflektera solljus, då dessa sägas återkasta ljuset »nästan som en spegel». Men anmärkningar av detta slag hava ju ringa betydelse i jämförelse med bokens stora och påtagliga förtjänster. Ehuru vi icke sakna populärt hållna böcker i astronomiska ämnen, avfattade på vårt språk, synes lektor Asplinds bok mycket väl kunna försvara sin plats. Säkerligen blir den ett välkommet tillskott till den naturvetenskapliga litteraturen i våra folkbildnings- och skolbibliotek, och den torde med fördel kunna användas som premiebok till naturvetenskapligt intresserade ungdomar.

*T. E. Aurén.*

Albert Einstein, *Min världsbild.* Översättning från tyskan av G. Starck. Albert Bonniers förlag, Stockholm 1934, 211 sid., kr. 5: 75.

Boken innehåller en samling uppsatser från skilda tider — tyvärr odaterade — över mycket skilda ämnen: politik, pacifism, nationalekonomi, religion, uppfostran. En avdelning är ägnad judendomen, och i en annan återges skriftväxlingen mellan Einstein och preussiska och bayerska vetenskapsakademierna, där Einstein motiverar sitt utträde ur dessa. Den sista och omfångsrikaste avdelningen utgör en samling populärvetenskapliga uppsatser vilka, bortsett från ett par speciella, som behandla vattendragens meanderbildning och Flettnerrotorn, belysa den matematiska fysikens metod skildrande de idéers utvecklingsgång, som gruppera sig om relativitetsteorierna.

I sitt vackra tal till Planck nämner Einstein några av de motiv, som driva människor till vetenskaplig forskning: behovet att finna fäste och ro i en objektiv värld, där tankarna kunna växa i klarhet och vidd, önskan att undfly vardagens tröstlösa enahanda. Mot sin vilja drages han in i de politiska lidelsernas virvel, ser sig misskänd och sina åsikter vanställda. Boken är ett svar på en önskan, som uttalats av Einsteins vänner och av allmänheten, och dess uppgift är närmast att förebygga förfalskningarnas vidmakthållande och utbredning. Oförsagt hävdar han forskningens rätt och politisk frihet. Han låter sig icke bländas av efemära skenvärden. Hans uttalanden äro »uttryck för en fri och ärlig, av

nationella och klassfördomar obunden människas övertygelse, som icke önskar något högre än sina medmänniskors väl och mänskliga tillvarons harmoniska gestaltning.» Poincarés ord om moralisk och vetenskaplig sanning skulle ha kunnat vara Einsteins: »Et pourtant je ne peux les séparer et ceux qui aiment l'une ne peuvent pas ne pas aimer l'autre. Pour trouver l'une, comme pour trouver l'autre, il faut s'efforcer d'affranchir complètement son âme du préjugé et de la passion.» Jämsides med behovet av ensamhet och oberoende finnes hos Einstein lidelsen för social rättvisa och social plikt. Solidaritetskänsla och medlidande är hans etiks grund. Han tror trots allt på människorna och att förnuftet en gång skall segra. Han karaktäriserar sin religiositet som vördnad för den underbara ordningen, den praestabiliserade harmonien i naturen och tankens världar, och anser tron på denna utgöra en av de starkaste drivfjädrarna till forskning.

Einstein skildrar hur den newtonska världsbilden utbildas och omformas, hur dess brister, som Newton själv klart såg, efter Faradays, Maxwells och Lorentz's arbeten slutligen övervunnos genom relativitetsteorien, vars matematiska grund redan Riemann lade, anande rumsmetrikens samband med de fysikaliska realiteterna. Relativitetsteorien är en principteori och däri ligger dess fasthet. Den utgör en anpassning till verkligen iakttagna fakta byggande på grundsatsen, att ett fysikaliskt begrepp är berättigat i den mån det står i en klar och entydig relation till iakttagna fakta. Ett intressant exempel lämnas från hans egen forskning, när han finner nyckeln i likheten mellan trög och tung massa och ställer upp sin genialt enkla ekvivalensprincip. Den matematiska fysikens axiom böra vara så få och enkla som möjligt. Abstraktionen stegras slutligen därhän, att forskaren måste ledas av rent matematiska synpunkter. Einstein uppställer som heuristisk princip, motiverad med många exempel, att naturföreteelserna äro förverkligandet av det matematiskt enklast möjliga.

Denna princip leder honom också vid uppställandet av den enhetliga fältteorien. Under utvecklingens gång framträda alltjämt diskrepanser och kompromisser och driva tanken vidare. Fältteorierna kunna ej undvara den materiella punkten. Kvantmekaniken, som även arbetar med kontinuerliga funktioner har försökt övervinna svårigheten att fatta energiens och materiens atomistiska struktur genom att tolka funktionernas uppgift så, att de angiva sannolikheterna för att en partikel skall ha ett visst läge eller ett visst rörelsetillstånd.

Einstein tillmäter denna tolkning endast en övergående betydelse

och tror på möjligheten av att konstruera en matematisk modell till tingen själva.

*V. Stenström.*

Moll-Rudberg, *Lärobok i fysik.* Del III. Magnetism och elektricitet. 11:e uppl. Svenska Bokförlaget, Stockholm 1934, 138 sid., kr. 2:75.

Av den välkända Moll-Rudbergs lärobok i fysik har nu utkommit en 11:te upplaga av tredje delen. Vid utarbetandet av en lärobok torde fysiken och i synnerhet elektricitetsläran vara ett av de ämnen, som ställer de största krav på författaren. Utvecklingen på detta område går raskt undan och nyheterna inom såväl den rent vetenskapliga fysiken som dess tekniska tillämpningar komma tätt. Det är därför med största intresse som fysikläraren tager del av ifrågavarande nya upplaga. Förändringarna äro ganska stora och vederbörlig hänsyn har tagits till den kritik, som riktats mot vissa kapitel i föregående upplaga. Trots de många nyheterna har sidantalet minskats framför allt genom att åtskilliga elementära saker, som kunna anses vara inhämtade redan i realskolan, strukits.

På magnetismen har den grundläggande Coulombska lagen tryckts med vanlig stil och den teoretiska delen fått en fylligare framställning, vilket anmälaren med nöje konstaterar. De elektrostatiska fenomenens förklaring har helt baserats på elektronteorien. Influensfenomenet har fått en mera ingående förklaring och betydelsen av potentialbegreppet har understrukits genom att detta kapitel tryckts med vanlig stil. I slutet av elektrostatiken har en ultramodern influensmaskin fått plats vid sidan av den gamla friktionsmaskinen. Elektrokemien har i hög grad avkortats genom att historiken, alla elektrolysförsök utom ett (kopparklorid), dissociationsteorien, tekniska användningar av elektrolysen, Nernsts teori, Daniells element och salmiakelementet uteslutits sedan föregående upplaga. Inskränkningar måste tydligen göras för att få plats för nyheterna, men anmälaren skulle gärna sett att Nernsts teori funnits kvar även i denna upplaga (med fin stil). Den ger dock lärjungarna någon föreställning om uppkomsten av de potentialsprång, som sedan ingående omtalas i samband med Ohms lag II. I diskussionen av Joules lag har produkten $RI^2$ genomgående ersatts med VI, varigenom potentialens fysikaliska innebörd starkare framhålles. Kapitlet om termoströmmar har lagts in före induktion. På sidan 109 och följande äro införda några mycket trevliga figurer, som visa energileveransen till elektrifierade järnvägar samt maskinsalarna i Trollhättans och

Lilla Edets kraftverk. Kapitlet 15 är nytt och innehåller en synnerligen välskriven framställning av urladdningsfenomenen.

Snart sagt varje fysiklärare har sin egen metod att framställa de fysikaliska lagarna. Den ena metoden kan ofta vara lika bra som den andra, men några reflexioner, som anmälaren gjort vid genomläsandet av ifrågavarande lärobok, kunna kanske vara av intresse för tidskriftens läsare.

På sid. 11 framhålla författarna att jordmagnetiska fältet påverkar en magnetnål med ett kraftpar. Varför användas då i fig. 25 olika beteckningar för de krafter, som påverka magnetnålens nord- resp. sydända? Den magnetiska kartan fig. 26 är ny och mera detaljerad än i föregående upplaga, men den har därigenom blivit mindre överskådlig. I fig. 37 förses provkulan med ett elektroskop för att påvisa laddningens fördelning på en konduktor. Det torde kunna ifrågasättas om detta är pedagogiskt lämpligt, då det senare i § 26 framhålles, att elektroskopets utslag beror på potentialen och denna ju är densamma i konduktorns alla punkter. I definitionen på elektrisk fältstyrka (sid. 20), borde fältets riktning markeras genom att framför ordet elektrostatisk sätta ordet positiv. Motsvarande anmärkning gäller definitionen på magnetisk fältstyrka på sidan 5. Att sätta likhetstecken mellan kapacitet och elektricitetsmängd (sid. 26) måste betecknas som en ren felaktighet. Dessa storheter hava dock helt olika dimensioner. Uttrycket (sid. 35) »$^1/_2$ atom koppar och $^1/_4$ atom tenn» (som avskilts samtidigt med en atom väte) synes mindre lyckligt. Atomen får väl alltjämt åtminstone i detta sammanhang betraktas som odelbar.

Tumregeln borde formuleras så, att det tydligt framgår, att handen och strömmen måste befinna sig på samma sida om magnetnålen. Detta är ej fallet i den klassiska formuleringen. Anmälaren brukar formulera andra grenströmlagen så: Produkten av strömstyrka och motstånd i vardera grenen är konstant. Därigenom vinnes dels att vardera membrum i ekvationen får en fysikalisk betydelse (potentialdifferensen mellan förgreningspunkterna) dels kan lagen omedelbart tillämpas på flera grenar än två. Vid motiveringen varför en voltmeters motstånd bör vara stort framhålles (sid. 56), att strömförlusten (energiförlusten) därigenom blir obetydlig. Det väsentliga är ju dock, att potentialdifferensen mellan punkterna B och D (fig. 91) i minsta möjliga grad sänkes genom instrumentets inkoppling. I tabellen på sid. 58 äro vissa värden på specifika ledningsmotstånden ändrade sedan föregående upplaga. Tyvärr synes författarna hava glömt att i svaren till exemplen göra härav föranledda ändringar. Som svar på exempel 38 står 45,7 volt, 174,3 volt i stället för det riktiga 46,9 volt, 173,1 volt.

På sidan 61 skrives Joulska konstanten $k = 0{,}24$ gkal. Enheten för konstanten är ej gkal utan gkal/joule. Kirchhoffs andra strömförgreningslag torde vara mindre utsatt för missförstånd vid fysikskrivningar, om den formuleras sålunda: Algebraiska summan av alla potentialändringar i en sluten strömkrets är lika med noll. Därigenom blir också § 68 alldeles överflödig.

Kapitlet induktion är i sin förra del tämligen oförändrat sedan föregående upplaga. I det synnerligen instruktiva kvantitativa induktionsförsöket sid. 81 har i en not anmärkts att ett »avbrott vid K är nödvändigt, för att strömmen icke skall grena sig. Strömmen avbrytes ett ögonblick och försöket börjar sedan så att säga på nytt.» Detta synes anmälaren vara att onödigt krångla till försöket. Något strömavbrott behöver ej ske. Ledaren AB skär kraftlinjer. I densamma induceras då en elektromotorisk kraft, som sänder en ström från A till B (eller tvärtom beroende på rotations- och fältriktning). Denna ström går sedan genom galvanometern. Metallringen KC skär inga kraftlinjer, dess enda uppgift är att åstadkomma kontakt mellan B och galvanometerns ena klämskruv.

§ 76 har försetts med ett par nya figurer över Faradays klassiska försök att demonstrera självinduktionens verkan vid strömslutning och strömavbrott. Det skulle säkert varit till hjälp för mången mindre erfaren fysiklärare, om författarna givit några närmare anvisningar, hur det i och för sig synnerligen instruktiva försöket bör anordnas för att lyckas väl. Enligt meddelande från redaktionen kommer dock detta att närmare behandlas i en särskild uppsats av lektor Wetterblad.

I kapitel 12, som behandlar elektriska maskiner äro flera figurer nya. Fig. 131 b kunde på ett tydligare sätt ha visat, hur trumankarets härvor äro förbundna med lamellerna. Författarna medtaga 6 figurer för att visa en likströmsmaskins byggnad, samtliga försedda med hästskomagneter. Avsikten härmed är troligen att framhålla, att den magnetiska kretsen i möjligaste grad skall vara sluten. Då emellertid ingen figur visar hur magnetstället i en modern likströmsmaskin är format — vilket hade varit önskvärt — torde eleverna lätt bibringas den uppfattningen, att statorns form verkligen är den i fig. angivna. Fig. 133—136 hade enligt anmälarens mening varit värdefullare, om de ritats som enkla kopplingsschema, endast åskådliggörande ankarets, fältets och förkopplingsmotståndets inbördes sammankoppling. Lärjungarna hade då fått en anvisning på hur en figur bör ritas vid lösning av problem på detta område. Orsaken till att Grammes ring har kommit ur bruk är att tillverkningen av trumankaret är billigare än ring-

ankaret. I elektriskt avseende äro de praktiskt taget likvärdiga. I § 81 beskrives ett treledningsnät. Någon upplysning om batteriets funktion borde ha lämnats.

De påpekanden av mera kritisk art, som anmälaren i ovanstående rader gjort, kunna icke på något sätt förringa de utomordentligt stora förtjänsterna hos Moll-Rudbergs lärobok. Den svenska fysikundervisningen äger i detta arbete en synnerligen värdefull tillgång tack vare framställningens logiska byggnad och klarhet. Den nu utkomna upplagan visar, att Ture och Erik Rudberg väl förvaltat pundet från Moll, och arbetet är alltjämt en av de bästa läroböcker i fysik, som finnas att tillgå på vårt språk.

*Albert Björkeson.*

Böös-Lundberg, *Lärobok i kemi för gymnasiet,* 2:dra upplagan, P. A. Norstedt & Söners förlag (Svenska Bokförlaget), Stockholm 1934, kr. 6:—.

I denna nya upplaga ha de klamrar, som i den förra markerade skillnaden i kurs för det differentierade och det odifferentierade gymnasiet borttagits. Detta motiveras av att enligt 1933 års kursplaner lärogången i kemi skall vara »direkt fortlöpande». Kapitlet »Översikt över Sveriges industri» har strukits, även denna åtgärd med stöd av stadgan. Birkeland-Eydes metod för bindning av luftkvävet samt Hess' lag ha vidare fått vika för en utvidgning av kapitlet om lösningar och om modern atomteori.

Kapitlet om lösningar omfattar nu 23 sidor mot förut 15. Förutom en vidgad framställning om bl. a. begreppet löslighetsprodukt och om kolloidala lösningar tillkommer här som nytt stoff Ostwalds utspädningslag samt innebörden av vätejonskoncentrationens betecknande med $p_H$. I anslutning till zinkens förhållande till syror har begreppet normalpotential införts. Slutkapitlet om radioaktivitet och atomteori har ökats från 8 till 15 sidor. »Effektiv» text uppgår nu till 300 sid.

Genom den företagna omredigeringen av boken har behandlingen av den fysikaliska kemien blivit tämligen ojämn. Författarna ge sig alltför hastigt in på teorierna. Efter en redogörelse för vätets förekomst och framställning samt något om metallernas förhållande till syror behandlas reaktionshastighetens beroende av koncentration och temperatur, begreppet katalys, valet av enhet för atom- och molekylarvikt samt Avogadros sats i tät följd. Begreppet »molar» lösning, som införes på sid. 8 kommer först till användning på sid. 107 på tal om Ostwalds utspädningslag. I

anslutning till Avogadros sats och Gay-Lussac's volymlag brukar det resonemang genomföras, som lett till antagandet av de vanligaste gasernas tvåatomighet. Denna sak förutsättes som bekant vid behandlingen av begreppet molekylarvikt på sid. 8.

Övergången från vätets atomvikt = 1 till syrets = 16 som utgångspunkt för valet av atomvikter bör beledsagas av en beskrivning över hur vattnets kvantitativa sammansättning kan bestämmas, annars blir det hela väl abstrakt.

På sid. 45 härledes massverkans lag med den reaktion, som leder till bildningen av svaveltrioxid ur svaveldioxid och syre som exempel. Redan begreppet reversibel reaktion är nytt och okänt för eleverna, varför det måste exemplifieras. Detta låter sig också lätt göra men ej medelst den valda reaktionen. För att förklara, varför ej en alltför hög temperatur bör väljas vid föreliggande reaktion, framhålla författarna, att jämviktskonstanten

$$k = \frac{[SO_2]^2 \cdot [O_2]}{[SO_3]^2}$$

stiger med temperaturen. Det förefaller enklare att påpeka, att värmealstrande reaktioner gynnas av låg temperatur och värmebindande av hög.

Hur ledningsförmågan hos lösningen av en elektrolyt varierar med utspädningen, omnämnes på sid. 102, utan att författarna härleda, hur dissociationsgraden härur kan beräknas. Detta göres ej heller i fråga om den förhöjda fryspunktsnedsättningen.

Mot bakgrunden av denna redan förut påtalade knapphet i framställningen komma de nyutvidgade kapitlen att te sig oproportionerligt omfångsrika. Man kan t. o. m. diskutera om Ostwalds utspädningslag och beteckningen $p_H$ överhuvud taget höra hemma i skolkursen. Konsekvenserna av den sista reduktionen i timantalet för kemi ha ännu icke visat sig i sin fulla evidens.

Den beskrivande kemien har däremot blivit behandlad på ett förtjänstfullt sätt både vad disposition, innehåll och form beträffar. De försök, som anbefallas till utförande inom den organiska kemien, ha numrerats och för övrigt givits en särställning i texten. Önskvärt hade varit, att detta förfarande tillämpats även inom den oorganiska delen för underlättande av den preparerande lärarens arbete.

*Samuel Hennichs.*

Lennart Elfman, *Lärobok i mekanik för tekniska skolor. II. Dynamik.* 1:de uppl. P. A. Norstedt & Söner (Svenska Bokförlaget) 1934, 111 sid., kr. 3:60.

Den nya upplagan av Elfmans lärobok i dynamik är i huvudsak identisk med den 1:a upplagan, som utkom 1918. Bland de smärre ändringar och kompletteringar, som gjorts, må här nämnas, att förf. visar att hastighet och acceleration äro tidsderivator av vägfunktionen. Tyvärr nöjer han sig med detta konstaterande och drager icke i fortsättningen någon nytta av denna vetskap. En annan nyhet är, att förf. även behandlar samtidig translation och rotation. Avdelningen om tröghetsmoment är utvidgad. Begreppen tröghetsradie och svängmoment ha införts.

Terminologien är den inom mekaniken vanliga. Beträffande rörelsemängdslagen eller impulslagen kallar dock förf. produkten av kraft och tid för kraftens »verkan». Denna benämning är enligt min mening intetsägande och borde utbytas mot de allmänt använda benämningarna »pådrift» eller »impuls».

*Martin Lien.*

Hedström-Öije, *Arbetsuppgifter i ekvationslära för realskolan.* Del 1. Bokstavsräkning, ekvationer med en obekant jämte problem. Sv. Bokförlaget (Bonniers). Stockholm 1934, 107 sid. Kr. 2:25.

Ovan nämnda bok är avsedd för självstudier och torde främst lämpa sig för lärjungar, som ha svårt att följa undervisningen i skolan och därför på egen hand vilja förkovra sig i ämnet. Men även mera försigkomna lärjungar, som genom självstudier önska vinna större färdighet, kunna ha nytta av ett och annat i boken. Den är också väl tillrättalagd för självstudier. Exempelsamlingen innehåller omkring 600 ex., de flesta så pass enkla, att de säkerligen inte bereda några större svårigheter, sedan de metodiska anvisningarna studerats. De sistnämnda äro både utförliga och tydliga och belysta med uträknade typexempel.

Boken har helt visst en uppgift att fylla och förtjänar att uppmärksammas av alla dem, vilka matematiken även på detta stadium bereder svårigheter.

*Verner Carlson.*

# Problemavdelning.[1]

## Matematiska uppgifter.

707) *Om koefficienterna äro rationella och bråket*

$$\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$$

*kan förkortas med en lineär faktor, så är* $(Bc-Cb):(Ab-Ba)$ *en jämn kvadrat.* X.

708) *I triangeln ABC är* $\angle A=100°$, $\angle B=60°$. *Punkten P ligger inom triangeln och* $\angle PAC=30°$, $\angle PBC=20°$. *Beräkna* $\angle APC$ *exakt.* X.

709) *Två cirklar med centra på x-axeln tangera ellipsen* $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ *och råkas under räta vinklar. Sök orten för deras skärningspunkt.* X.

## Enklare matematiska uppgifter.[2]

*Rättelse:* Uppg. 698 i föregående häfte innehåller ett tryckfel. Den bör utbytas mot endera:

Visa, att

a) $\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$; b) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

710) Uppdela $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ i faktorer.

Svar: $3(a+b)(a+c)(b+c)$.

711) Beräkna $\sqrt{2(x-y)^4+2(y-z)^4+2(z-x)^4}$ genom att först införa $u=x-y$ och $v=y-z$.

Svar: $2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

712) Visa, att i varje triangel är $a^2+b^2+c^2=4T(\cot A+\cot B+\cot C)$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 710—711, 713—715, 719, 720, 722—724 äro insända av X., uppg. 712, 716, 718, 721 av S. B., uppg. 717 av C. E. B.

713) Lös ekvationen

$$\frac{2\cos 2x - 1}{\sin 2\alpha} + \frac{\operatorname{tg} x}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Svar: $x_1 = 45° - \frac{\alpha}{2} + n \cdot 180°$; $x_2 = \frac{\alpha}{4} - 22°{,}5 + n \cdot 90°$.

714) Lös ekvationen $tg\, 2x = 2\, tg\,(x + \alpha)$, då $\log tg\,\alpha = 0{,}5963 - 5$.
Svar: $1°{,}95 + n \cdot 180°$.

715) Lös ekvationen

$$\frac{\cos 2x - \sin 4x}{\sin x - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Svar: $25° + n \cdot 120°$; $65° + n \cdot 120°$.

716) Två cirklar med radierna $a$ och $b$ tangera varandra i $O$. En gemensam tangent berör cirklarna i $A$ och $B$. Beräkna ytan av triangeln $AOB$.

Svar: $\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$.

717) Över höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel som diameter ritas en cirkel. Från hypotenusans ändpunkter dragas tangenter till denna cirkel. Angiv förhållandet mellan ytan av den så erhållna triangeln och den ursprungliga.
Svar: 4 : 3.

718) I en rätvinklig triangel är den ena spetsiga vinkeln $\alpha$ och vinkeln mellan medianerna mot kateterna $v$. Visa, att

$$tg\, v = 0{,}75 \sin 2\alpha.$$

719) I triangeln $ABC$ är vinkeln $A = 60°$. Den diameter i den omskrivna cirkeln, som går genom $A$, delar $BC$ innantill i förhållandet 1 : 2. Beräkna vinklarna B och C.
Svar: 45° och 75°.

720) Från origo $O$ drages den godtyckliga kordan $OA$ i cirkeln $x^2 + y^2 = x$. Man utdrager $OA$ över $A$ stycket $AP = 1$. Sök maximivärdet på $P$:s avstånd från $x$-axeln.

Svar: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

721) En sfär med medelpunkten $M$ och radien $r$ är given. En regelbunden tetraeder har tre av sina hörn på sfärens yta och det fjärde utanför sfären. Vilket är det största avstånd, som tetraederns fjärde hörn kan ha från $M$?
Svar: $r\sqrt{3}$.

722) I en sektor, vars centrivinkel = 90°, inskrives en rektangel med två hörn på bågen. Diagonalen är = cirkelns radie. Visa, att förhållandet mellan rektangelns sidor är 1 : 2.

723) I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = AD$ och $CB = CD$. Dessutom delar $BE \parallel AD$ fyrhörningens yta mitt itu. Visa, att $E$ delar $CD$ enligt gyllene snittet.

724) Två cirklar råkas i $C$; en gemensam tangent berör cirklarna i $A$ och $B$. Cirkeln $ABC$ uppritas. Visa, att dess radie är medelproportional till de ursprungliga cirklarnas radier.

## Lösningar till uppg. 672—674.

672) *I en likbent triangel är basen av konstant längd och dess mittpunkt O fix. Triangelns motstående vinkelspets är belägen på en fix, rät linje. Sök orten för den inskrivna cirkelns medelpunkt, när basen vrider sig kring O.* *X.*

Den likbenta triangeln $ABC$ har spetsen $C$ på en fast linje. $OQ$ är normal mot denna linje och $I$ är den inskrivna cirkelns medelpunkt (eller den till basen hörande *vidskrivna* cirkelns medelpunkt). Om höjden $CO$ råkar omskrivna cirkelns periferi i $F$, så är $FI = FB$. Normalen i $F$ mot $CF$ råkar $QO$ förlängd i $P$. Man har då

$$\overline{PI}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FI}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FO}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OB}^2.$$

Men $PO \,.\, OQ = CO \,.\, OF = \overline{OB}^2$; $\because PO$ och $PI$ av konstant längd. Orten utgöres alltså av en cirkelbåge. *X.*

Även löst av *C. H.*

673) *Mellan vilka gränser ligger* $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, *om A, B och C äro en triangels vinklar? Kan man med kännedom om värdet på summan avgöra, huruvida triangeln är spets-, rät- eller trubbvinklig?* *X.*

Om man håller sig till trianglar inskrivna i en cirkel med radien 1, medelpunkten $O$ och tyngdpunkten $M$, så är enligt en känd sats (denna tidskrifts årgång *6*, sid. 203)

$$3 \,.\, \overline{OM}^2 + \tfrac{1}{3}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \tfrac{3}{4}.$$

Då $0 \leqq OM < \frac{1}{2}$, följer $O < \Sigma \sin^2 A \leqq 2{,}25$.
Av $s = \Sigma \sin^2 A = 3 - \Sigma \cos^2 A = 3 - (1 - 2 \cos A \cos B \cos C)$ fås

$$\cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = \tfrac{1}{2}(s - 2),$$

varav kriteriet: $2{,}25 \geqq s > 2$ (triangeln spetsvinklig); $s = 2$ (rätvinklig); $2 > s > 0$ (trubbvinklig). *X.*

Även löst av *C. H.*

674) *Lös ekv.-syst.*

$$x^2 - yz = a$$
$$y^2 - xz = b$$
$$z^2 - xy = c$$

Genom addition erhålles

$$a + b + c = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$

eller $2(a + b + c) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz =$

$$= (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2. \quad (1)$$

Genom subtraktion erhålles

$$a - b = x^2 - y^2 + xz - yz = (x - y)(x + y + z), \quad (2)$$

$$b - c = (y - z)(x + y + z), \quad (3)$$

$$a - c = (x - z)(x + y + z). \quad (4)$$

Insättning av värdena på $x - y$, $y - z$, $x - z$ i (1) ger

$$2(a + b + c) = [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2] : (x + y + z)^2,$$

varav

$$x + y + z = \pm \sqrt{\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2}{2(a + b + c)}} = s. \quad (5)$$

Av (2) och (3) fås

$$x - y = \frac{a - b}{s}, \quad x - z = \frac{a - c}{s}. \quad (6)$$

Av (5) och ekvationerna (6) fås genom addition

$$3x = s + \frac{a - b}{s} + \frac{a - c}{s} = \frac{s^2 + 2a - b - c}{s} =$$

$$= \frac{3(a^2 - bc)}{s(a + b + c)} = \pm \frac{3(a^2 - bc)}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}.$$

Svaret alltså:

$$x = \pm \frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}; \quad y = \pm \frac{b^2 - ac}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}};$$

$$z = \pm \frac{c^2 - ab}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}}.$$

*S. B.*

Även löst av *X.* och *C. H.*

# Matematiska och fysikaliska uppgifter i studentskrivningarna H. T. 1934.

## Matematiska uppgifter för latingymnasiet.

1. Beräkna utan räknetabell värdet av uttrycket

$$\frac{\log \sqrt{15}}{1 + \log 3 - \log 2}.$$

2. I en triangel $ABC$ är $AB = 100$ m, vinkeln $A = 25°$ och vinkeln $B = 110°$. På $AC$ tages en punkt $D$ så, att $BD = BC$. Beräkna ytan av triangeln $BCD$.
3. I en triangel äro två sidor respektive 12 och 11 cm. Medianen (mittlinjen) till den tredje sidan är 10 cm. Beräkna triangelns vinklar.
4. I ett land äro årligen dödsfallens antal $^1/_{40}$ och födelsernas $^1/_{32}$ av invånarantalet vid årets början. Om man bortser från övriga förändringar i invånarantalet, efter huru många år skall då folkmängden ha ökats med 25%?
5. I ett likbent parallelltrapets $ABCD$ äro de parallella sidorna $AB$ och $CD$ respektive 3 och 5 cm samt de icke parallella sidorna $BC$ och $AD$ vardera 4 cm. Beräkna de delar, i vilka bissektrisen till vinkeln $D$ delar sidan $BC$.
6. $O$ är medelpunkten, $A$ en punkt på periferien till en given cirkel. Radien $OA$ delas i tre lika delar, och genom den delningspunkt, som ligger närmast $A$, drages en korda i cirkeln, som med $OA$ bildar 30°. Genom kordans ändpunkter dragas tangenter till cirkeln. Beräkna längden av dessa tangenter (mellan tangeringspunkten och tangenternas skärningspunkt), uttryckt i cirkelns radie ($= r$).
7. Beräkna ytan av ett fyrsidigt område $ABCD$, där sidorna $AB$, $BC$ och $CD$ äro respektive 20, 25 och 30 m samt diagonalerna $BD$ och $AC$ resp. 35 och 40 m.
8. $ABCD$ är en rektangel med sidorna $AB = 15$ cm och $BC = 12$ cm. På $AB$ är mellan $A$ och $B$ en punkt $E$ så belägen, att $AE = 2$ cm. Det finns två rektanglar, inskrivna i den givna, som ha ett hörn i $E$ och ett hörn på var och en av den givna rektangelns tre övriga sidor. Beräkna dessa rektanglars ytor.

*Resultat:* **1.** 0,5. **2.** 1786 m². **3.** 44°,88; 55°,41; 79°,71. **4.** Efter 36 år. **5.** $3\frac{1}{3}$ cm och $\frac{2}{3}$ cm. **6.** $r\sqrt{8}$. **7.** 691,9 m². **8.** $(90 \pm 11\sqrt{10})$ cm², d. v. s. 55,21 cm² och 124,79 cm².

## Matematiska uppgifter för realgymnasiet.

1. Trianglarna $ABC$ och $ABD$ ligga på var sin sida om $AB$. Vinkeln $ACB$ är rät och triangeln $ABD$ är liksidig. Sök längden av $CD$ uttryckt i den rätvinkliga triangelns kateter $a$ och $b$.
2. I en geometrisk serie är summan av de 20 första termerna $^1/_3$ av summan av de 10 första termernas kvadrater. Summan av de 30 första termerna är $^1/_3$ av summan av de 10 första termernas kuber. Bestäm serien.
3. I triangeln $ABC$ är sidan $BC$ aritmetiska mediet till de båda andra sidorna. Medianen (mittlinjen) till $BC$ är medelproportional till $AB$ och $AC$. Beräkna vinkeln $BAC$.
4. Skärningspunkten mellan linjerna $x+2y-4=0$ och $x-y-1=0$ betecknas med $A$, skärningspunkterna mellan dessa linjer och $x$-axeln med $B$, resp. $C$. Man skall bestämma ekvationerna för de linjer $l$, som gå genom $A$ så, att vinkelräta avstånden till en linje $l$ från $B$ och $C$ förhålla sig som 1 : 2.
5. Två klot, det ena med 10 cm, det andra med 7,5 cm radie, skära varandra så, att den del av den mindre sfären, som ligger utanför den större, blir en konkavkonvex lins, vars största tjocklek är 1 cm. Beräkna linsens volym.
6. Man betraktar den rotationskropp, som uppkommer, då ett likbent parallelltrapets (de båda icke parallella sidorna lika långa) roterar kring den längsta av de båda parallella sidorna. Vilket är det största värde, som denna rotationskropps volym kan antaga, om den sida, kring vilken rotationen sker, är konstant och $= a$ samt de övriga sidorna variera så, att det likbenta trapetsets omkrets förblir konstant och $= 3a$?
7. I den utanför origo belägna skärningspunkten mellan kurvorna $y = ax^2$ och $y = x^3$ uppritas normalen till vardera kurvan. Visa, att ytan av den triangel, som bildas av dessa normaler och ordinataxeln, har ett av konstanten $a$ oberoende värde.
8. Visa, att om förhållandet mellan rötterna till ekvationen $x^2+ax+b=0$ är lika med förhållandet mellan rötterna till ekvationen $y^2+cy+d=0$, så är $a^2d = bc^2$.
9. I en tresidig pyramid är basen en vid $A$ rätvinklig triangel $ABC$. De tre från toppen $D$ utgående kantlinjerna äro lika långa.

Vidare är vinkeln $ADB = 30°$ och vinkeln $ADC = 60°$. Beräkna vinkeln mellan sidoytorna $ADB$ och $ADC$.

*Resultat:* **1.** $\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{3}}$. **2.** Kvoterna äro $-\frac{1}{2}$ eller $-2$ och resp. första termer $\frac{3}{2}$ och $-3$. **3.** $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ och $\alpha = 44°{,}42$. **4.** $x + 5y = 7$ och $x + y = 3$. **5.** $\frac{127\pi}{6} = 66{,}50$ cm³. **6.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **7.** $\frac{1}{12}$. **8.** Av $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ erhålles $\frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{y_1 + y_2}{y_1}$ och $\frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_2}$, varav genom multiplikation $\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2}$ eller $a^2 d = bc^2$. **9.** Drag $BQ \perp AD$ och $QS \perp AD$. Sätt $AB = 1$, $\angle SQB = x$ och $\angle DAB = \alpha\,(= 75°)$, så blir $AQ = \cos\alpha$, $BQ = \sin\alpha$, $QS = \cos\alpha\sqrt{3}$, $AS = 2\cos\alpha$. Två uttryck på $\overline{BS}^2$ erhållas: $\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos x\sqrt{3} = 1 + 4\cos^2\alpha$, varav $\cos x = -\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sqrt{3}} = -\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ och $x = 98°{,}90$.

## Uppgifter i fysik.

1. Den för graderingen avsedda, raka och jämntjocka delen av ett areometerrör har en utvändig diameter av 10,4 mm. Huru tung måste areometern vara, för att avståndet mellan de delstreck, som beteckna specifika vikterna 0,7 och 1,0 skall bliva 100 mm?
2. En pendel består av en liten kula, fästad vid ett fint, viktslöst och otänjbart snöre, som utgår från en fast upphängningspunkt. Pendeln rör sig som en konisk pendel, dock så att utslagsvinkeln till följd av luftmotståndet så småningom minskas. Snöret bildar vid en viss tidpunkt en vinkel av 60° med lodlinjen. Efter en stund har denna vinkel nedgått till 45°. Huru förhålla sig värdena på kulans rörelseenergi vid de båda tidpunkterna?
3. I en kolv finnes en blandning av is och vatten. I blandningen inledes mättad vattenånga, vars temperatur är 100° C, utan att all is smälter. Huru mycket väger den inledda ångan, om sammanlagda volymen av vattnet och isen i kolven efter smältningen och kondensationen är 16 cm³ större än förut? Vattnets spec. vikt vid 0° C är 1,000, isens 0,917. Isens smältvärme är 80, vattnets ångbildningsvärme 539. Intet värmeutbyte äger rum med omgivningen.
4. På en optisk bänk äro efter varandra i ordning uppställda ett belyst föremål, två tunna linser (med sammanfallande huvud-

axlar), den första positiv, den andra negativ, samt en skärm. Föremålet befinner sig 40 cm från den positiva linsen. Då avståndet mellan linserna är 8 cm, erhålles, efter inställning av skärmen, på denna en reell bild, lika stor som föremålet. Beräkna den negativa linsens brännvidd, då den positivas är 12 cm.

5. En lupp består av en homogen glascylinder, av vars ändytor den ena är plan och vinkelrät mot cylinderns axel, den andra en utåt buktad sfärisk yta, vars medelpunkt ligger på axeln. Avståndet mellan ändytorna, utefter axeln räknat, är 4,5 cm. Den sfäriska ytan, vars radie är 2 cm, är vänd mot ögat. På vilket avstånd från den plana ytan bör ett föremål placeras, för att luppen skall därav giva en bild, som av ögat förlägges långt bort? Endast centrala strålar tagas i betraktande. Glasets brytningsexponent är 1,5.

6. Kollimatorspalten till ett spektroskop, i vilket prismat ersatts med ett optiskt gitter, belyses med ljus från ett geisslerrör, innehållande vätgas. Gittrets springor äro parallella med kollimatorns lodräta spaltöppning, gitterplanet är vinkelrätt mot kollimatorns horisontella axel, och kikarens axel är horisontell samt vridbar kring en vertikal axel i gittrets plan. I andra ordningens spektrum synes vätgasens röda spektrallinje (C-linjen) falla på kikarens hårkors vid två olika lägen av kikaren, vilkas vinkelavstånd är 62°,48. Beräkna antalet springor per cm hos gittret. C-linjens våglängd är 0,0006563 mm.

7. Ett större ackumulatorbatteri med 30 volts elektromotorisk kraft och 0,2 ohms inre motstånd användes vid ett tillfälle för att ladda fem seriekopplade smärre ackumulatorer om var och en 2 volts elektromotorisk kraft. Motståndet i ledningen avpassades så, att laddningsströmmen blev 2 amp. Medan laddningen pågick, måste det stora batteriet tagas i anspråk som strömkälla även för annat ändamål, varvid de nya ledningarna direkt inkopplades mellan batteriets poler, parallellt med de förra ledningarna. Huru stark ström kunde här högst uttagas, då laddningsströmmen icke borde sjunka under 1,8 amp? Elektromotoriska krafter och motstånd i den ursprungliga strömbanan få anses konstanta.

8. En shuntmotor för likström är direkt ansluten till 220 volts nätspänning. Ankarets motstånd är 0,1 ohm, fältmagneternas 440 ohm. Huru stor är den elektriska effekt, uttryckt i watt, som högst kan omsättas i mekanisk effekt, då motorn sammanlagt vid normal belastning drager 7,5 amp?

*Resultat:* **1.** 19,82 g. **2.** $3 : \sqrt{2}$. **3.** 57,76 g. **4.** — 16 cm. **5.** 1 cm. **6.** 3952. **7.** 10 *A*. **8.** 1535,1 *W*.

# Realskolexamen H. T. 1934.

## Provräkning.

1. Lös ekvationen

$$\frac{5x^2 + 1\frac{7}{9}}{12 - 3x} - \frac{4\frac{2}{3} : 0{,}7 - 5x}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

2. Priset på en flygbiljett från Malmö till Göteborg är 50 kr. Priset på en järnvägsbiljett (snälltåg, andra klass) samma väg är 22 kr. a) Huru många procent billigare är järnvägsbiljetten än flygbiljetten? b) Huru många procent dyrare är flygbiljetten än järnvägsbiljetten?
3. En person får ärva 20 000 kr. Han köper ett hus för 15 250 kr., vilket i årlig avkastning lämnar 6,5%. För återstoden av arvet köper han 4% obligationer till 95% kurs. Huru stor årlig inkomst av sitt arv får han genom denna placering?
4. En ökenexpedition med tre bilar medför sammanlagt 555 liter bensin. En av bilarna kan köra 4 km på 1 liter bensin, de båda andra respektive 5 km och 6 km på 1 liter. Huru långt kan expeditionen framtränga, då den måste vara beredd att återvända samma väg utan tillfälle att förnya bensinförrådet?
5. För blekt, svensk sulfitcellulosa betalas i engelsk hamn 11 ½ shillings per cwt (hundredweight). Vad bör en köpare betala för samma vara i svensk hamn, då frakten till England utgör 9 kr. per ton? Priset skall uttryckas i kronor per ton. 1 £ (pund) = 20 shillings = 19,40 kr.; 1 cwt = 50,8 kg.
6. Man vill bestämma vikten av en cylindrisk stenpelare med 28 cm diameter och 2 m höjd. Då den våg, man har tillgänglig, ej tillåter så stor belastning, väger man i stället ett mindre block av samma material. Detta, som är en jämntjock, rektangulär skiva med tjocklek, bredd och längd respektive 5 cm, 2,5 dm och 4 dm, väger 12,5 kg. Beräkna pelarens vikt. $\pi = 3\frac{1}{7}$.
7. På sidan $AB = 6$ cm i den liksidiga triangeln $ABC$ ligger punkten $D$ på 2 cm avstånd från $B$. Punkterna $E$ och $F$ äro så belägna på sidorna $BC$ och $AC$ respektive, att linjen $DE$ är vinkelrät mot sidan $BC$ och linjen $EF$ är parallell med sidan $AB$. Sök ytan av fyrhörningen $ADEF$.
8. I fyrhörningen $ABCD$ äro vinklarna $A$, $B$ och $C$ respektive 60°, 150° och 90°. Sidan $AB$ är 18 cm och sidan $AD$ 32 cm. Beräkna fyrhörningens yta.

*Resultat:* **1.** $1\frac{1}{3}$. **2.** a) 56 %; b) $127\frac{3}{11}$ %. **3.** 1191,25 kr. **4.** 450 km. **5.** 210,59 kr. **6.** 308 kg. **7.** $\frac{\sqrt{243}}{4} = 3{,}897$ cm². **8.** $\frac{463\sqrt{3}}{2} = 401$ cm².

# TIDSKRIFT
FÖR
# ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

1935